

## Taivutuksesta ja väännöstä, osa II: Elementtimenetelmä

Jukka Aalto

**Tiivistelmä** Artikkelin ensimmäisessä osassa [1] johdettiin kuormituksen alaiselle suoralle palkille yhdistetty taivutus- ja vääntöteoria. Se perustui neljää käyritysfunktiota käyttäen muodostettuun yksinkertaiseen siirtymäotaksumaan. Tässä artikkelin toisessa osassa esitellään, kuinka tätä teoriaa voidaan soveltaa käytännön tehtäviin elementtimenetelmän tekniikoita hyväksi käyttäen. Tehtävä voidaan jakaa seuraaviin osiin: 1) käyritysfunktioiden määrittäminen, 2) poikkileikkaussuureiden määrittäminen, 3) palkkitehtävän ratkaiseminen ja 4) poikki-leikkauksen jännitysjakautuman määrittäminen. Lopuksi esitetään laskentaesimerkki.

*Avainsanat:* palkkiteoria, taivutus, vääntö, leikkausmuodonmuutos, käyritysfunktio, reunaarvotehtävä, heikko muoto, elementtimenetelmä

*Vastaanotettu:* 4.6.2020. *Hyväksytty:* 21.10.2020. *Julkaistu verkossa:* 13.4.2021.

### Johdanto

Samoin kuin artikkelin ensimmäisessä osassa, palkin jäykkyyttä kuvaaville suureille, kuten taivutusjäykkyydelle  $EI_z$ , käytetään tässä kaksikirjaimisia symboleja. Jos poikki-leikkaus on homogeeninen ja kimmomoduuli  $E$  vakio, taivutusjäykkyys  $EI_z$  on kimmomoduulin  $E$  ja jäyhyysmomentin  $I_z$  tulo.

Viitattaessa artikkelin ensimmäisen osan kaavoihin, kaavanumeron eteen lisätään I-. Esimerkiksi kaavanumero (I-21) alla viittaa artikkelin ensimmäisen osan [1] kaavaan (21).

## Käyristymisfunktioiden määrittäminen

### Heikot muodot

Käyristymisfunktioille  $\Phi(y, z)$ ,  $\Psi_x(y, z)$ ,  $\Psi_y(y, z)$  ja  $\Psi_z(y, z)$  esitettyjen reuna-arvotekhtävien (I-21) numeerista ratkaisemista varten johdettiin niiden heikot muodot (I-22), jotka ovat

$$\int_A G \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) dA = \int_A G \left( \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} z - \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} y \right) dA, \quad (1a)$$

$$\int_A G \left( \frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_x \phi dA, \quad (1b)$$

$$\int_A G \left( \frac{\partial \hat{\Psi}_y}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_y}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_y y dA, \quad (1c)$$

$$\int_A G \left( \frac{\partial \hat{\Psi}_z}{\partial y} \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_z}{\partial z} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_z z dA, \quad (1d)$$

missä  $A$  on poikkipinnan alue ja  $s$  sen reuna sekä  $\hat{\Phi}(y, z)$ ,  $\hat{\Psi}_x(y, z)$ ,  $\hat{\Psi}_y(y, z)$  ja  $\hat{\Psi}_z(y, z)$  ovat mielivaltaisia testifunktioita. Yhtälössä (1b) oleva käyristymisfunktio  $\phi(y, z)$  ajatellaan tunnetuksi. Se voidaan määrittää, kun käyristymisfunktio  $\Phi(y, z)$  on ensin ratkaistu reuna-arvoprosbleeman (1a) ratkaisuna, kaavalla

$$\phi(y, z) = \Phi(y, z) + \Delta_\Phi - z_T y + y_T z, \quad (2)$$

missä  $\Delta_\Phi$  on vakio sekä  $y_T$  ja  $z_T$  vääntökeskiön koordinaatit. Reuna-arvotekhtävien (1) ratkaisuna saatavat käyristymisfunktiot ovat vakiota vailla yksikäsitteisiä. Sellaisiksi ne saadaan vaatimalla, että ne häviävät valitussa nollapisteessä  $P_0$ .

### Elementtiyhtälöt

Muodostettaessa heikkoja muotoja (1) vastaavat elementtiyhtälöt, otetaan käyristymisfunktioille  $\Phi(y, z)$ ,  $\Psi_x(y, z)$ ,  $\Psi_y(y, z)$  ja  $\Psi_z(y, z)$  elementtiaprosksimaatiot

$$\begin{aligned} \Phi(y, z) &= \sum_{i=1}^M N_i(y, z) \Phi_i, & \Psi_x(y, z) &= \sum_{i=1}^M N_i(y, z) \Psi_{xi}, \\ \Psi_y(y, z) &= \sum_{i=1}^M N_i(y, z) \Psi_{yi}, & \Psi_z(y, z) &= \sum_{i=1}^M N_i(y, z) \Psi_{zi}, \end{aligned} \quad (3)$$

missä  $\Phi_i$ ,  $\Psi_{xi}$ ,  $\Psi_{yi}$  ja  $\Psi_{zi}$  ovat käyristymisfunktioiden solmuarvot,  $N_i$  ovat muotofunktiot sekä  $M$  on solmujen lukumäärä. Testifunktioille  $\hat{\Phi}(y, z)$ ,  $\hat{\Psi}_x(y, z)$ ,  $\hat{\Psi}_y(y, z)$  ja  $\hat{\Psi}_z(y, z)$  otetaan vastaavat esitykset. Heikkojen muotojen (1) diskretointi tavanomaiseen tapaan johtaa seuraaviin yhtälöihin

$$\mathbf{K} \mathbf{a}_\Phi = \mathbf{R}_\Phi, \quad \mathbf{K} \mathbf{a}_x = \mathbf{R}_x, \quad \mathbf{K} \mathbf{a}_y = \mathbf{R}_y, \quad \mathbf{K} \mathbf{a}_z = \mathbf{R}_z, \quad (4)$$

missä

$$\mathbf{a}_\Phi = \begin{Bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_M \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_x = \begin{Bmatrix} \Psi_{x1} \\ \vdots \\ \Psi_{xM} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_y = \begin{Bmatrix} \Psi_{y1} \\ \vdots \\ \Psi_{yM} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_z = \begin{Bmatrix} \Psi_{z1} \\ \vdots \\ \Psi_{zM} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ovat käyritysmisfunktion systeemisolmuarvojen muodostamat pystyvektorit. Systeemi-  
matriisin  $\mathbf{K}$  ja systeemivektoreiden  $\mathbf{R}_\Phi$ ,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  ja  $\mathbf{R}_z$  alkiot ovat

$$K_{ij} = \int_A G \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dA \quad (6)$$

ja

$$R_{\Phi i} = \int_A G \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} z - \frac{\partial N_i}{\partial z} y \right) dA, \quad R_{xi} = \int_A EN_i \phi dA, \quad R_{yi} = \int_A EN_i y dA, \quad R_{zi} = \int_A EN_i z dA. \quad (7)$$

On huomattavaa, että kaikilla neljällä yhtälöryhmällä (4) on sama kerroinmatriisi. Jotta niille saadaan yksikäsitteiset ratkaisut, valitaan elementtiverkon tietty solmu  $r$  nollapisteeksi  $P_0$  ja vaaditaan, että sen solmuarvot  $\Phi_r$ ,  $\Psi_{xr}$ ,  $\Psi_{yr}$  ja  $\Psi_{zr}$  häviävät. Tämä tapahtuu helpoimmin korvaamalla systeemi- $\mathbf{K}$   $r$ :s vaaka- ja pystyriivi nollarivillä ja panemalla vastaavaksi diagonaalitermiksi ykkönen sekä korvaamalla systeemivektorien  $\mathbf{R}_\Phi$ ,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  ja  $\mathbf{R}_z$   $r$ :s alkiot nolllalla.

### Lineaarinen kolmioelementti

Liitteessä A on johdettu lauseke systeemi- $\mathbf{K}$  vastaavalle elementtimatriisille  $\mathbf{K}^e$  lineaarisen kolmioelementin tapauksessa, jossa kimmomoduuli  $E^e$  ja liukumoduuli  $G^e$  ja ovat vakioita elementin alueella. Sille saatiin kaava

$$\mathbf{K}^e = \frac{G^e}{4A^e} \begin{bmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

missä  $A^e$  on elementin pinta-ala ja

$$\begin{aligned} b_1 &= z_2^e - z_3^e, & b_2 &= z_3^e - z_1^e, & b_3 &= z_1^e - z_2^e, \\ c_1 &= y_3^e - y_2^e, & c_2 &= y_1^e - y_3^e, & c_3 &= y_2^e - y_1^e. \end{aligned} \quad (9)$$

Liitteessä A on myös johdettu lausekkeet systeemivektoreita  $\mathbf{R}_\Phi$ ,  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  ja  $\mathbf{R}_z$  vastaaville elementtivektoreille  $\mathbf{R}_\Phi^e$ ,  $\mathbf{R}_x^e$ ,  $\mathbf{R}_y^e$  ja  $\mathbf{R}_z^e$ . Niille saatiin kaavat

$$\mathbf{R}_\Phi^e = \frac{G^e}{2} \begin{Bmatrix} b_1 \bar{z}^e - c_1 \bar{y}^e \\ b_2 \bar{z}^e - c_2 \bar{y}^e \\ b_3 \bar{z}^e - c_3 \bar{y}^e \end{Bmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_x^e = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2\phi_1^e + \phi_2^e + \phi_3^e \\ \phi_1^e + 2\phi_2^e + \phi_3^e \\ \phi_1^e + \phi_2^e + 2\phi_3^e \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\mathbf{R}_y^e = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2y_1^e + y_2^e + y_3^e \\ y_1^e + 2y_2^e + y_3^e \\ y_1^e + y_2^e + 2y_3^e \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

$$\mathbf{R}_z^e = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2z_1^e + z_2^e + z_3^e \\ z_1^e + 2z_2^e + z_3^e \\ z_1^e + z_2^e + 2z_3^e \end{Bmatrix}. \quad (13)$$

Näissä kaavoissa  $\phi_i^e$  ovat käyritysmisfunktion  $\phi$  elementtisolmuarvot sekä  $y_i^e$  ja  $z_i^e$  ovat elementtisolmujen koordinaatit sekä

$$\bar{y}^e = \frac{y_1^e + y_2^e + y_3^e}{3}, \quad \bar{z}^e = \frac{z_1^e + z_2^e + z_3^e}{3} \quad (14)$$

ovat elementin keskipisteen koordinaatit.

## Poikkileikkaukseen liittyvien suureiden määrittäminen

### Poikkileikkaukseen liittyvät suureet

Poikkileikkauksen  $y, z$ -koordinaatiston origo  $O$  asetetaan poikkileikkauksen vetojäykkyysskeskiöön. Käytännössä sen asema määritetään valitsemalla poikkileikkaukseen sopiva  $y', z'$ -koordinaatisto. Tässä koordinaatistossa vetojäykkyysskeskiön koordinaatit saadaan kaavoilla

$$y'_0 = \frac{ES'_z}{EA}, \quad z'_0 = \frac{ES'_y}{EA}, \quad (15)$$

missä

$$EA = \int_A E dA, \quad ES'_y = \int_A Ez' dA, \quad ES'_z = \int_A Ey' dA. \quad (16)$$

Taivutusjäykkyydet ja tulojäykkyys saadaan kaavoilla

$$EI_y = \int_A Ez'^2 dA, \quad EI_z = \int_A Ey'^2 dA, \quad EI_{yz} = \int_A Eyz' dA. \quad (17)$$

Vakio  $\Delta_\Phi$  ja vääntökeskiön koordinaatit  $y_T$  ja  $z_T$  saadaan kaavoilla

$$\Delta_\Phi = -\frac{ES_\Phi}{EA}, \quad \begin{Bmatrix} y_T \\ z_T \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI_y EI_z - EI_{yz}^2} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -EI_{y\Phi} \\ EI_{z\Phi} \end{Bmatrix}, \quad (18)$$

missä

$$ES_\Phi = \int_A E\Phi dA, \quad EI_{y\Phi} = \int_A Ez'\Phi dA, \quad EI_{z\Phi} = \int_A Ey'\Phi dA. \quad (19)$$

Leikkaus, vääntö- ja käyritysmisjäykkyys saadaan kaavoilla

$$GA = \int_A G dA, \quad GJ = \int_A G \left[ -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)z + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)y \right] dA, \quad EI_\phi = \int_A E\phi^2 dA. \quad (20)$$

Leikkauskorjaukset saadaan kaavalla

$$\begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} = \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_{y\Psi_y} & EI_{z\Psi_y} \\ EI_{y\Psi_z} & EI_{z\Psi_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}, \quad (21)$$

missä

$$\begin{aligned} EI_{y\Psi_y} &= \int_A Ez\Psi_y \, dA, & EI_{z\Psi_y} &= \int_A Ey\Psi_y \, dA, \\ EI_{y\Psi_z} &= \int_A Ez\Psi_z \, dA, & EI_{z\Psi_z} &= \int_A Ey\Psi_z \, dA. \end{aligned} \quad (22)$$

### Poikkileikkaussuureiden määrittäminen

Elementtimenetelmää sovellettaessa on poikkileikkaussuureet käytännöllistä määrittää summana elementtiosuuksistaan. Esimerkiksi leikkausjäykkyydelle, vääntöjäykkyydelle ja käyristymisjäykkyydelle (20) saadaan

$$GA = \sum_{e=1}^N (GA)^e, \quad GJ = \sum_{e=1}^N (GJ)^e, \quad EI_\phi = \sum_{e=1}^N (EI_\phi)^e, \quad (23)$$

missä niiden elementtiosuudet ovat  $(GA)^e$ ,  $(GJ)^e$  ja  $(EI_\phi)^e$  sekä  $N$  on elementtien lukumäärä. Liitteessä B on johdettu poikkileikkaussuureiden elementtiosuuksien kaavat lineaarisen kolmioelementin tapauksessa, kun kimmomoduuli  $E^e$  ja liukumoduuli  $G^e$  ovat vakioita elementin alueella. Seuraavassa esitetään nämä tulokset.

Aksiaalijäykkyyden  $EA$  ja kimmomoduulilla painotettujen staattisten momenttien  $ES_z$  ja  $ES_y$  elementtiosuudet ovat

$$(EA)^e = E^e A^e, \quad (ES_z)^e = E^e A^e \bar{y}^e, \quad (ES_y)^e = E^e A^e \bar{z}^e. \quad (24)$$

Kimmomoduulilla painotettujen jäyhyysmomenttien  $EI_z$  ja  $EI_y$  sekä tulomomentin  $EI_{yz}$  elementtiosuudet ovat

$$\begin{aligned} (EI_z)^e &= \frac{E^e A^e}{6} (y_1^e y_1^e + y_2^e y_2^e + y_3^e y_3^e + y_2^e y_3^e + y_3^e y_1^e + y_1^e y_2^e), \\ (EI_y)^e &= \frac{E^e A^e}{6} (z_1^e z_1^e + z_2^e z_2^e + z_3^e z_3^e + z_2^e z_3^e + z_3^e z_1^e + z_1^e z_2^e), \\ (EI_{yz})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e z_1^e + 2y_2^e z_2^e + 2y_3^e z_3^e + y_2^e z_3^e + y_3^e z_2^e + y_3^e z_1^e + y_1^e z_3^e + y_1^e z_2^e + y_2^e z_1^e). \end{aligned} \quad (25)$$

Suureiden  $ES_\phi$ ,  $EI_{z\phi}$  ja  $EI_{y\phi}$  elementtiosuudet ovat

$$\begin{aligned} (ES_\phi)^e &= E^e A^e \bar{\Phi}^e, \\ (EI_{z\phi})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Phi_1^e + 2y_2^e \Phi_2^e + 2y_3^e \Phi_3^e \\ &\quad + y_2^e \Phi_3^e + y_3^e \Phi_2^e + y_3^e \Phi_1^e + y_1^e \Phi_3^e + y_1^e \Phi_2^e + y_2^e \Phi_1^e), \\ (EI_{y\phi})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Phi_1^e + 2z_2^e \Phi_2^e + 2z_3^e \Phi_3^e \\ &\quad + z_2^e \Phi_3^e + z_3^e \Phi_2^e + z_3^e \Phi_1^e + z_1^e \Phi_3^e + z_1^e \Phi_2^e + z_2^e \Phi_1^e), \end{aligned} \quad (26)$$

missä  $\Phi_i^e$  ovat käyristymisfunktion  $\Phi$  elementtiosuuarvot ja

$$\bar{\Phi}^e = \frac{\Phi_1^e + \Phi_2^e + \Phi_3^e}{3}. \quad (27)$$

Leikkausjäykkyyden  $GA$ , vääntöjäykkyyden  $GJ$  ja käyritysmisjäykkyyden  $EI_\phi$  elementtiosuudet ovat

$$(GA)^e = G^e A^e, \quad (28)$$

$$(GJ)^e = \frac{G^e A^e}{6} [-3(b_1 \Phi_1^e + b_2 \Phi_2^e + b_3 \Phi_3^e) \bar{z}^e + 3(c_1 \Phi_1^e + c_2 \Phi_2^e + c_3 \Phi_3^e) \bar{y}^e + y_1^e y_1^e + y_2^e y_2^e + y_3^e y_3^e + y_2^e y_3^e + y_3^e y_1^e + y_1^e y_2^e + z_1^e z_1^e + z_2^e z_2^e + z_3^e z_3^e + z_2^e z_3^e + z_3^e z_1^e + z_1^e z_2^e] \quad (29)$$

ja

$$(EI_\phi)^e = \frac{E^e A^e}{6} (\phi_1^e \phi_1^e + \phi_2^e \phi_2^e + \phi_3^e \phi_3^e + \phi_2^e \phi_3^e + \phi_3^e \phi_1^e + \phi_1^e \phi_2^e). \quad (30)$$

Suureiden  $EI_{y\Psi_y}$ ,  $EI_{z\Psi_y}$ ,  $EI_{y\Psi_z}$  ja  $EI_{z\Psi_z}$  elementtiosuudet ovat

$$\begin{aligned} (EI_{y\Psi_y})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Psi_{y1}^e + 2z_2^e \Psi_{y2}^e + 2z_3^e \Psi_{y3}^e \\ &\quad + z_2^e \Psi_{y3}^e + z_3^e \Psi_{y2}^e + z_3^e \Psi_{y1}^e + z_1^e \Psi_{y3}^e + z_1^e \Psi_{y2}^e + z_2^e \Psi_{y1}^e), \\ (EI_{z\Psi_y})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Psi_{y1}^e + 2y_2^e \Psi_{y2}^e + 2y_3^e \Psi_{y3}^e \\ &\quad + y_2^e \Psi_{y3}^e + y_3^e \Psi_{y2}^e + y_3^e \Psi_{y1}^e + y_1^e \Psi_{y3}^e + y_1^e \Psi_{y2}^e + y_2^e \Psi_{y1}^e), \\ (EI_{y\Psi_z})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Psi_{z1}^e + 2z_2^e \Psi_{z2}^e + 2z_3^e \Psi_{z3}^e \\ &\quad + z_2^e \Psi_{z3}^e + z_3^e \Psi_{z2}^e + z_3^e \Psi_{z1}^e + z_1^e \Psi_{z3}^e + z_1^e \Psi_{z2}^e + z_2^e \Psi_{z1}^e), \\ (EI_{z\Psi_z})^e &= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Psi_{z1}^e + 2y_2^e \Psi_{z2}^e + 2y_3^e \Psi_{z3}^e \\ &\quad + y_2^e \Psi_{z3}^e + y_3^e \Psi_{z2}^e + y_3^e \Psi_{z1}^e + y_1^e \Psi_{z3}^e + y_1^e \Psi_{z2}^e + y_2^e \Psi_{z1}^e), \end{aligned} \quad (31)$$

missä  $\Psi_{yi}^e$  ja  $\Psi_{zi}^e$  ovat käyritysmisfunktioiden  $\Psi_y$  ja  $\Psi_z$  elementtiosuuarvot.

## Palkkitehtävän analyttinen ratkaisu

Artikkelin osassa I kävi ilmi, että palkkitehtävässä veto/puristustehtävä, taivutustehtävä ja vääntötehtävä voidaan ratkaista erikseen. Syntyneet differentiaaliyhtälöt (I-79a), (I-83) ja (I-79d) ovat myös niin yksinkertaisia, että ne voidaan ratkaista analyttisesti. Tässä analyttistä ratkaisua tarkastellaan hieman yksityiskohtaisemmin.

### Veto/puristustehtävä

Veto/puristustehtävässä aksiaalisen siirtymän differentiaaliyhtälö (I-79a) on

$$u''(x) = -\frac{q_x(x)}{EA} \quad (32)$$

ja normaalivoiman ja aksiaalisen siirtymän yhteys (I-54a) on

$$N(x) = EAu'(x). \quad (33)$$

Differentiaaliyhtälön (32) ratkaisu on

$$u(x) = C_1x + C_2 + u_0(x), \quad (34)$$

missä  $u_0(x)$  on yksityisratkaisu. Tiettyä jakautunutta aksiaalista kuormaa  $q_x(x)$  vastaava yksityisratkaisu saadaan integroimalla täydellinen yhtälö (32) puolittain kahdesti ja jättämällä integrointivakiot pois. Kun yksityisratkaisu  $u_0(x)$  tunnetaan, voidaan huomioimalla reunaehdot palkin päissä ja soveltamalla yhtälöitä (33) ja (34) määrittää veto/puristus-tehtävän analyyttinen ratkaisu.

Määritetään esimerkkinä yksityisratkaisu  $u_0(x)$  siinä tapauksessa, että aksiaalinen kuorma jakautuu lineaarisesti, jolloin se voidaan esittää muodossa

$$q_x(x) = q_{x1} + \frac{q_{x2} - q_{x1}}{L}x, \quad (35)$$

missä  $q_{x1}$  ja  $q_{x2}$  ovat kuorman arvot palkin päissä ja  $L$  on palkin pituus. Sijoittamalla tämä yhtälöön (32) ja integroimalla se puolittain kahdesti saadaan yksityisratkaisuksi

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{q_{x1}}{EA} x^2 - \frac{1}{6} \frac{q_{x2} - q_{x1}}{EAL} x^3. \quad (36)$$

Useimmissa käytännön tehtävissä aksiaalinen jakautunut kuorma on nolla, vakio tai lineaarinen, jolloin tämä tulos on sovellettavissa.

### Taivutustehtävä

Palkin taivutukseen liittyville siirtymäsuureille ja jännitysresultanteille käytetään tässä seuraavia merkintöjä

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix}, \quad \Theta = \begin{Bmatrix} \theta_z \\ \theta_y \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} \quad (37)$$

ja kutsutaan vastaavasti taipuma-, kiertymä-, liukuma-, taivutusmomentti- ja leikkausvoimavektoreiksi. Jakautuneille kuormille käytetään merkintöjä

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{Bmatrix} m_z \\ m_y \end{Bmatrix} \quad (38)$$

ja kutsutaan poikittaiskuorma- ja momenttikuormavektoreiksi. Taivutusjäykkyyksistä (B bending) ja leikkausjäykkyyksistä (S shear) muodostetaan myös matriisit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{yz} & k_z \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Tarkastellaan tässä taivutustehtävää näitä merkintöjä käyttäen. Palkin tasapainoyhtälöt (I-44d), (I-44e), (I-44b) ja (I-44c) ovat

$$\mathbf{Q}' + \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (40)$$

ja

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}' + \mathbf{m}. \quad (41)$$

Keskimmäisten liukumien, taipumien ja poikkileikkauksen kiertymien yhteydet (I-14) ovat

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{v}' - \boldsymbol{\Theta}, \quad (42)$$

taivutusmomenttien ja poikkileikkauksen kiertymien yhteydet (I-54b) ovat

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}\boldsymbol{\Theta}' \quad (43)$$

ja leikkausvoimien ja keskimääräisten liukumien yhteydet (I-60) ovat

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}\boldsymbol{\gamma}. \quad (44)$$

Poikkileikkauksen kiertymille saadaan kaavoilla (42) ja (44)

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{v}' - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Q}, \quad (45)$$

taivutusmomenteille kaavoilla (43), (45) ja (40)

$$\mathbf{M} = -\mathbf{B}(\mathbf{v}'' + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}) \quad (46)$$

ja leikkausvoimille saadaan kaavoilla (41) ja (46)

$$\mathbf{Q} = -\mathbf{B}(\mathbf{v}''' + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}') + \mathbf{m}. \quad (47)$$

Poikkileikkauksen kiertymille saadaan kaavoilla (45) ja (47)

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{v}' + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{v}''' + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}' - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{m}. \quad (48)$$

Sijoittamalla leikkausvoimat (47) tasapainoyhtälöön (40) saadaan palkin taipumille  $\mathbf{v}(x)$  differentiaaliyhtälö

$$\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q} + \mathbf{m}') - \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}''. \quad (49)$$

Tämä on yhtälö (I-81) matriisimuotoisena. Yhtälön (49) yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{v}(x) = \frac{x^3}{6}\mathbf{C}_1 + \frac{x^2}{2}\mathbf{C}_2 + x\mathbf{C}_3 + \mathbf{C}_4 + \mathbf{v}_0(x), \quad (50)$$

missä  $\mathbf{C}_i$ ,  $i=1,2,3,4$ , ovat integrointivakioista kootut  $2 \times 1$  pystyvektorit ja  $\mathbf{v}_0(x)$  on yksityisratkaisu. Tiettyjä jakautuneita kuormituksia  $\mathbf{q}(x)$  ja  $\mathbf{m}(x)$  vastaava yksityisratkaisu saadaan integroimalla täydellinen yhtälö (49) puolittain neljästi ja jättämällä integrointivakiot pois. Kun yksityisratkaisu  $\mathbf{v}_0(x)$  tunnetaan, voidaan huomioimalla reunaehdot palkin päissä ja soveltamalla yhtälöitä (46), (47), (48) ja (50) määrittää taivutustehävän analyttinen ratkaisu.

Määritetään esimerkkinä yksityisratkaisu  $\mathbf{v}_0(x)$  siinä tapauksessa, että poikittainen kuorma ja momenttikuorma jakautuvat lineaarisesti, jolloin ne voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{q}(x) = \mathbf{q}_1 + \frac{1}{L}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)x, \quad \mathbf{m}(x) = \mathbf{m}_1 + \frac{1}{L}(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)x, \quad (51)$$

missä  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$ ,  $\mathbf{m}_1$  ja  $\mathbf{m}_2$  ovat kuormien arvot palkin päissä yhtälö (49) saa muodon

$$\mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{B}^{-1}\left[\mathbf{q}_1 + \frac{1}{L}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1)x + \frac{1}{L}(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\right]. \quad (52)$$

Integroimalla tämä puolittain neljästi ja jättämällä integrointivakiot pois saadaan yksityisratkaisuksi tulos

$$\mathbf{v}_0(x) = \mathbf{B}^{-1}\left[\frac{x^4}{24}\mathbf{q}_1 + \frac{x^5}{120L}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1) + \frac{x^4}{24L}(\mathbf{m}_2 - \mathbf{m}_1)\right]. \quad (53)$$

Useimmissa käytännön tehtävissä jakautunut poikittainen kuorma ja momenttikuorma ovat korkeintaan lineaarisia, jolloin tämä tulos on sovellettavissa.



## Vääntötehtävä

Vääntökulman  $\theta_x(x)$  differentiaaliyhtälö (I-79d) on

$$\theta_x^{(4)} - \left(\frac{k}{L}\right)^2 \theta_x'' = \frac{m_x + b'}{EI_\phi}, \quad (54)$$

missä

$$k = L \sqrt{\frac{GJ}{EI_\phi}}, \quad (55)$$

ja  $L$  on palkin pituus. Saint-Venantin vääntömomentin, käyritysmomentin ja kokonaisvääntömomentin lausekkeet (I-76), (I-54c) ja (I-77) ovat

$$T(x) = GJ\theta_x'(x), \quad (56)$$

$$B(x) = -EI_\phi\theta_x''(x) \quad (57)$$

ja

$$M_x(x) = B'(x) + T(x) = -EI_\phi\theta_x'''(x) + GJ\theta_x'(x). \quad (58)$$

Differentiaaliyhtälön (54) yleinen ratkaisu on

$$\theta_x(x) = C_1 + C_2x + C_3 \sinh\left(\frac{k}{L}x\right) + C_4 \cosh\left(\frac{k}{L}x\right) + \theta_{x0}(x), \quad (59)$$

missä  $\theta_{x0}(x)$  on jakautuneita kuormituksia  $m_x(x)$  ja  $b(x)$  vastaava yksityisratkaisu. Kun yksityisratkaisu  $\theta_{x0}(x)$  tunnetaan, voidaan huomioimalla reunaehdot ja soveltamalla yhtälöitä (56)-(59) määrittää vääntötehtävän analyyttinen ratkaisu.

Määritetään esimerkkinä yksityisratkaisu  $\theta_{x0}(x)$  siinä tapauksessa, että momentti-kuorma ja käyritysmomenttikuorma jakautuvat lineaarisesti, jolloin ne voidaan esittää muodossa

$$m_x(x) = m_{x1} + \frac{m_{x2} - m_{x1}}{L}x, \quad b(x) = b_1 + \frac{b_2 - b_1}{L}x, \quad (60)$$

missä  $m_{x1}$ ,  $m_{x2}$ ,  $b_1$  ja  $b_2$  ovat kuormien arvot palkin päissä. Käytetään yritettä

$$\theta_x(x) = \alpha x^2 + \beta x^3, \quad (61)$$

missä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat vakioita. Sijoittamalla se differentiaaliyhtälöön (54) saadaan yhtälö

$$-2\alpha - 6\beta x = \frac{1}{GJ} \left(m_{x1} + \frac{b_2 - b_1}{L}x\right) + \frac{m_{x2} - m_{x1}}{GJL}x, \quad (62)$$

josta seuraa vakioille

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{1}{GJ} \left(m_{x1} + \frac{b_2 - b_1}{L}\right), \quad \beta = -\frac{1}{6} \frac{m_{x2} - m_{x1}}{GJL}. \quad (63)$$

Yksityisratkaisulle saadaan siis tulos

$$\theta_{x0}(x) = -\frac{1}{2} \frac{m_{x1}}{GJ} x^2 - \frac{1}{6} \frac{m_{x2} - m_{x1}}{GJL} x^3 - \frac{1}{2} \frac{b_2 - b_1}{GJL} x^2. \quad (64)$$

Useimmissa käytännön tehtävissä jakautunut vääntävä momenttikuorma ja käyritysmomenttikuorma ovat korkeintaan lineaarisia, jolloin tämä tulos on sovellettavissa. Myös monimutkaisemmin jakautuneiden kuormien  $m_x(x)$  ja  $b(x)$  tapauksessa yksityisratkaisu

on löydettävissä. Koska differentiaaliyhtälö (54) on analoginen ohutseinämäisten avointen poikkileikkausten vääntöteoriassa esiintyvän vastaavan yhtälön kanssa, voidaan alan kirjallisuudessa esitetyt yksityisratkaisut myös hyödyntää. Esimerkiksi lähteen [3] sivuilla 162-163 on esitetty joitain yksityisratkaisuja.

## Palkkitehtävän analyyttisiin ratkaisuihin perustuva elementtiratkaisu

Palkkitehtävän analyyttisten ratkaisujen määrittäminen monimutkaisemmissa tapauksissa on työlästä, joten prosessi on tarkoituksenmukaista systematisoida käyttäen elementtime-  
netelmän tekniikkaa. Seuraavassa esitellään elementit, joiden avulla veto/puristus-, taivutus- ja vääntötehtävät voidaan ratkaista. Tässä esitetään elementtien jäykkyysmatriisit ja kuormitusvektorit siinä tapauksessa, että elementtiin kohdistuva kuormitus on lineaarisesti jakautunut. Johdot on esitetty liitteissä C, D ja E. Niissä on myös esitetty, kuinka siirtymäsuureiden ja jännitysresultanttien tarkat jakaumat elementtien alueella voidaan määrittää. Tehtävät voisi myös formuloida likimääräisesti virtuaalisen työn periaatetta ja tavanomaisia  $C^0$ - ja  $C^1$ -jatkuvia janaelementtejä käyttäen, mutta tässä pitäydytään menettelyyn, joka antaa kaikille osatehtäville analyyttiset ratkaisut.

### *Veto/puristustehtävä*

Liitteessä C on johdettu veto/puristustehtävän elementtiratkaisu. Elementin jäykkyysmatriisille saatiin

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (65)$$

missä  $EA$  on elementin aksiaalinen jäykkyys ja  $L^e$  on elementin pituus. Siinä tapauksessa, että aksiaalinen kuorma  $q_x(x)$  jakautuu elementin alueella lineaarisesti, elementin kuormitusvektorille saatiin

$$\mathbf{R}^e = \frac{q_{x1}^e L^e}{6} \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q_{x2}^e L^e}{6} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \quad (66)$$

missä  $q_{x1}^e$ ,  $q_{x2}^e$  ovat kuorman arvot elementin päissä. Liitteessä C on myös esitetty, kuinka elementin kuormitusvektori saadaan monimutkaisemmin jakautuneen kuorman  $q_x(x)$  tapauksessa sekä kuinka aksiaalisen siirtymän  $u(x)$  ja normaalivoiman  $N(x)$  tarkka jakautuminen elementin alueella voidaan määrittää.

### *Taivutustehtävä*

Liitteessä D on johdettu taivutustehtävän elementtiratkaisu. Elementin jäykkyysmatriisille saatiin

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & -\frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} \\ \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (4\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}) & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{12}{L^3} \mathbf{I} & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{12}{L^3} \mathbf{I} & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} \\ \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (4\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} \quad (67)$$

missä

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{12}{L^2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B}, \quad (68)$$

$\mathbf{I}$  on  $2 \times 2$  yksikkömatriisi ja  $L^e$  on elementin pituus. Siinä tapauksessa, että jakautunut poikittainen kuorma  $\mathbf{q}(x)$  ja momenttikuorma  $\mathbf{m}(x)$  jakautuvat elementin alueella lineaarisesti, elementin kuormitusvektorille saatiin

$$\mathbf{R}^e = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{7L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{3} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{24} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{3L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{6} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^e}{30} \mathbf{I} - \frac{L^e}{24} \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \mathbf{q}_1^e + \begin{bmatrix} \frac{3L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{6} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^e}{30} \mathbf{I} + \frac{L^e}{24} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{7L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{3} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^e}{20} \mathbf{I} - \frac{L^e}{24} \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} \mathbf{q}_2^e + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ -\frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} \mathbf{m}_1^e + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I} \\ -\frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix} \mathbf{m}_2^e, \quad (69)$$

missä  $\mathbf{q}_1^e$ ,  $\mathbf{q}_2^e$ ,  $\mathbf{m}_1^e$  ja  $\mathbf{m}_2^e$  ovat kuormien arvot elementin päissä. Liitteessä D on myös esitetty, kuinka elementin kuormitusvektori saadaan monimutkaisemmin jakautuneiden kuormien  $\mathbf{q}(x)$  ja  $\mathbf{m}(x)$  tapauksessa sekä kuinka taipumien  $\mathbf{v}(x)$ , poikkileikkauksen kiertymien  $\boldsymbol{\Theta}(x)$ , leikkausvoimien  $\mathbf{Q}(x)$  ja taivutusmomenttien  $\mathbf{M}(x)$  tarkka jakautuminen elementin alueella voidaan määrittää.

Elementti, jonka jäykkyysmatriisi on kaavan (67) mukainen, soveltuu taivutustehtävän ratkaisemiseen yleisessä tapauksessa. Liitteessä D on esitetty, että symmetrisen poikkileikkauksen tapauksessa, jos  $y$ - tai  $z$ -akseli yhtyy poikkileikkauksen symmetria-akseliin, kytkentä  $(x, y)$ - ja  $(x, z)$ -tasossa tapahtuvan taivutuksen välillä häviää. Tällöin tässä esitetyt yhtälöt yhtyvät lähteessä [2] esitetyn elementin yhtälöihin.

### Vääntötehtävä

Liitteessä E on johdettu vääntötehtävän elementtiratkaisu. Elementin jäykkyysmatriisille saatiin

$$\mathbf{K}^e = \frac{GJ}{2 + k \operatorname{sh} - 2 \operatorname{ch}} \begin{bmatrix} \frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & \operatorname{ch} - 1 & -\frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & \operatorname{ch} - 1 \\ \operatorname{ch} - 1 & \frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) & 1 - \operatorname{ch} & \frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) \\ -\frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} & \frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} \\ \operatorname{ch} - 1 & \frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) & 1 - \operatorname{ch} & \frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) \end{bmatrix}, \quad (70)$$

missä

$$k = L^e \sqrt{\frac{GJ}{EI_\phi}}, \quad (71)$$

$GJ$  on elementin Saint-Venantin vääntöjäykkyys,  $EI_\phi$  on elementin käyritysmisjäykkyys ja  $L^e$  on elementin pituus. Kaavassa (70) käytetään myös lyhennysmerkintöjä  $\operatorname{sh} = \sinh(k)$  ja  $\operatorname{ch} = \cosh(k)$ . Siinä tapauksessa, että jakautunut momenttikuorma  $m_x(x)$  ja käyritysmismomenttikuorma  $b(x)$  jakautuvat elementin alueella lineaarisesti kuormitusvektorille saatiin

$$\mathbf{R}^e = \frac{1}{2 + k \operatorname{sh} - 2 \operatorname{ch}} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{k^2 - 4}{2k^2} + \frac{k^2 - 3}{3k} \operatorname{sh} - \frac{k^2 - 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( \frac{k^2 - 12}{6k^2} - \frac{3}{2k} \operatorname{sh} + \frac{k^2 + 6}{3k^2} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \\ \left( \frac{k^2 + 4}{2k^2} + \frac{k^2 + 6}{6k} \operatorname{sh} - \frac{k^2 + 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2k} \operatorname{sh} - \frac{1}{6} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \end{array} \right\} m_{x1}^e + \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{k^2 + 4}{2k^2} + \frac{k^2 + 6}{6k} \operatorname{sh} - \frac{k^2 + 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2k} \operatorname{sh} + \frac{1}{6} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \\ \left( \frac{k^2 - 4}{2k^2} + \frac{k^2 - 3}{3k} \operatorname{sh} - \frac{k^2 - 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( -\frac{k^2 - 12}{6k^2} - \frac{3}{2k} \operatorname{sh} + \frac{k^2 + 6}{3k^2} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \end{array} \right\} m_{x2}^e + \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{k}{2} \operatorname{sh} - \operatorname{ch} \\ \left( \frac{k^2 - 4}{2k^2} - \frac{2}{k} \operatorname{sh} + \frac{k^2 + 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ 1 + \frac{k}{2} \operatorname{sh} - \operatorname{ch} \\ -\left( \frac{k^2 - 4}{2k^2} - \frac{2}{k} \operatorname{sh} + \frac{k^2 + 4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \end{array} \right\} (b_2^e - b_1^e), \quad (72)$$

missä  $m_{x1}^e$ ,  $m_{x2}^e$ ,  $b_1^e$  ja  $b_2^e$  ovat kuormien arvot elementin päissä. Liitteessä E on myös esitetty, kuinka elementin kuormitusvektori saadaan monimutkaisemmin jakautuneiden kuormien  $m_x(x)$  ja  $b(x)$  tapauksessa sekä kuinka vääntökulman  $\theta_x(x)$ , Saint-Venantin vääntömomentin  $T(x)$ , käyritysmismomentin  $B(x)$  ja kokonaisvääntömomentin  $M_x(x)$

tarkka jakautuminen elementin alueella voidaan määrittää.

## Poikkileikkauksen jännitysjakautuman määrittäminen

### Poikkileikkauksen jännityskomponenttien jakautuminen

Kun palkin poikkileikkauksen käyrästymisfunktiot  $\phi(y, z)$ ,  $\Phi(y, z)$ ,  $\Psi_x(y, z)$ ,  $\Psi_y(y, z)$  ja  $\Psi_z(y, z)$  on ratkaistu ja palkin jännitysresultantit  $N$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $Q_z$ ,  $Q_y$ ,  $T$ ,  $B$  ja derivaatta  $B'$  tarkasteltavassa poikkileikkauksessa  $x = x_0$  tunnetaan, voidaan kaavojen (I-87) perusteella tietyn poikkileikkauksen normaali ja leikkausjännitys jakaumat määrittää kaavoilla

$$\sigma_x = \sigma_x^s + \sigma_x^b + \sigma_x^t, \quad \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{yx}^b \\ \tau_{zx}^b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tau_{yx}^t \\ \tau_{zx}^t \end{Bmatrix}, \quad (73)$$

missä yläindeksit s, b ja t viittaavat veto/puristus- (stretching), taivutus- (bending) ja vääntötehtävään (twisting). Näitä vastaavat normaalijännitykset ovat

$$\sigma_x^s = E \frac{N}{EA}, \quad \sigma_x^b = E \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}, \quad \sigma_x^t = -E \frac{B}{EI_\phi} \phi \quad (74)$$

ja leikkausjännitykset ovat

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yx}^b \\ \tau_{zx}^b \end{Bmatrix} = G \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}, \quad (75)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yx}^t \\ \tau_{zx}^t \end{Bmatrix} = G \left( \frac{T}{GJ} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \end{bmatrix} - \frac{B'}{EI_\phi} \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \end{bmatrix} \right).$$

Artikkelin ensimmäisen osan kaavoista (I-87) poiketen on tässä siis vedon/puristuksen, taivutuksen ja väännön osuudet jännityksistä eritelty.

### Poikkileikkauksen jännityskentän määrittäminen lineaarisen kolmioelementin tapauksessa

Jännitysten (74) ja (75) arvot elementin  $e$  solmun  $i$  kohdalla voidaan määrittää kaavoilla

$$(\sigma_x^s)_i = E^e \frac{N}{EA}, \quad (\sigma_x^b)_i = E^e \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y_i^e \\ z_i^e \end{Bmatrix}, \quad (\sigma_x^t)_i = -E^e \frac{B}{EI_\phi} \phi_i^e, \quad (76)$$

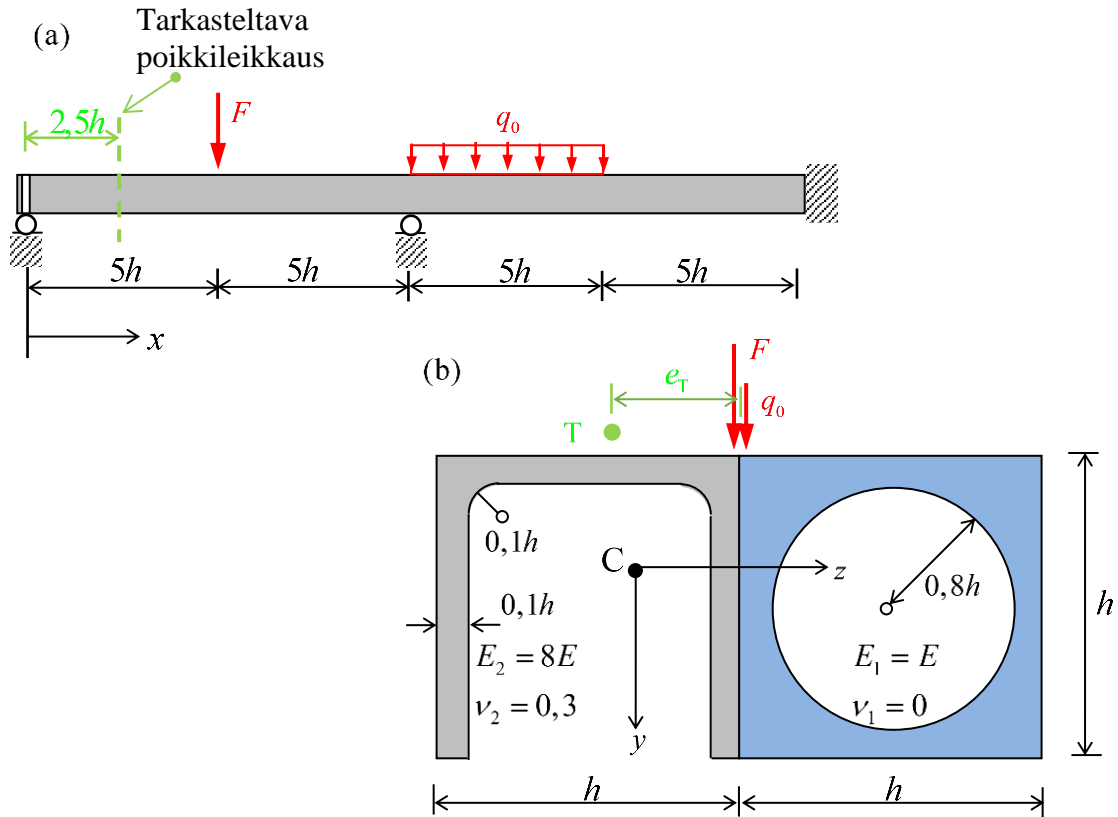
$$\begin{Bmatrix} (\tau_{yx}^t)_i \\ (\tau_{zx}^t)_i \end{Bmatrix} = G^e \left( \frac{T}{GJ} \begin{bmatrix} (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^e - z_i^e \\ (\frac{\partial \Phi}{\partial z})^e + y_i^e \end{bmatrix} - \frac{B'}{EI_\phi} \begin{bmatrix} (\frac{\partial \Psi_x}{\partial y})^e \\ (\frac{\partial \Psi_x}{\partial z})^e \end{bmatrix} \right), \quad (77a)$$

$$\begin{Bmatrix} (\tau_{yx}^b)_i^e \\ (\tau_{zx}^b)_i^e \end{Bmatrix} = G^e \begin{bmatrix} (\frac{\partial \Psi_y}{\partial y})^e & (\frac{\partial \Psi_z}{\partial y})^e \\ (\frac{\partial \Psi_y}{\partial z})^e & (\frac{\partial \Psi_z}{\partial z})^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}, \quad (77b)$$

missä  $y_i^e$  ja  $z_i^e$  ovat elementtisolmujen koordinaatit. Käyritysfunktioiden osittaisderivaatat, jotka ovat vakioita elementin alueella, lasketaan kaavoilla

$$\begin{aligned} (\frac{\partial \Phi}{\partial y})^e &= \frac{1}{2A^e} (b_1 \Phi_1^e + b_2 \Phi_2^e + b_3 \Phi_3^e), & (\frac{\partial \Phi}{\partial z})^e &= \frac{1}{2A^e} (c_1 \Phi_1^e + c_2 \Phi_2^e + c_3 \Phi_3^e), \\ (\frac{\partial \Psi_x}{\partial y})^e &= \frac{1}{2A^e} (b_1 \Psi_{x1}^e + b_2 \Psi_{x2}^e + b_3 \Psi_{x3}^e), & (\frac{\partial \Psi_x}{\partial z})^e &= \frac{1}{2A^e} (c_1 \Psi_{x1}^e + c_2 \Psi_{x2}^e + c_3 \Psi_{x3}^e), \\ (\frac{\partial \Psi_y}{\partial y})^e &= \frac{1}{2A^e} (b_1 \Psi_{y1}^e + b_2 \Psi_{y2}^e + b_3 \Psi_{y3}^e), & (\frac{\partial \Psi_y}{\partial z})^e &= \frac{1}{2A^e} (c_1 \Psi_{y1}^e + c_2 \Psi_{y2}^e + c_3 \Psi_{y3}^e), \\ (\frac{\partial \Psi_z}{\partial y})^e &= \frac{1}{2A^e} (b_1 \Psi_{z1}^e + b_2 \Psi_{z2}^e + b_3 \Psi_{z3}^e), & (\frac{\partial \Psi_z}{\partial z})^e &= \frac{1}{2A^e} (c_1 \Psi_{z1}^e + c_2 \Psi_{z2}^e + c_3 \Psi_{z3}^e), \end{aligned} \quad (78)$$

missä  $\Phi_i^e$ ,  $\Psi_{xi}^e$ ,  $\Psi_{yi}^e$  ja  $\Psi_{zi}^e$   $i=1,2,3$  ovat käyritysfunktioiden  $\Phi$ ,  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  ja  $\Psi_z$  elementtisolmuarvot.



Kuva 1. (a) Kolmitukainen palkki ja (b) sen kahdesta materiaalista koostuva poikkileikkaus

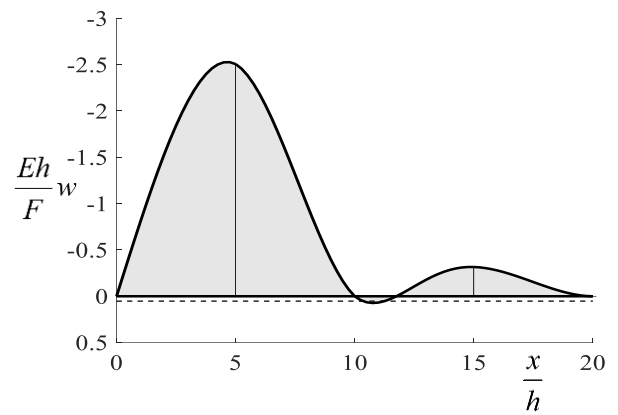
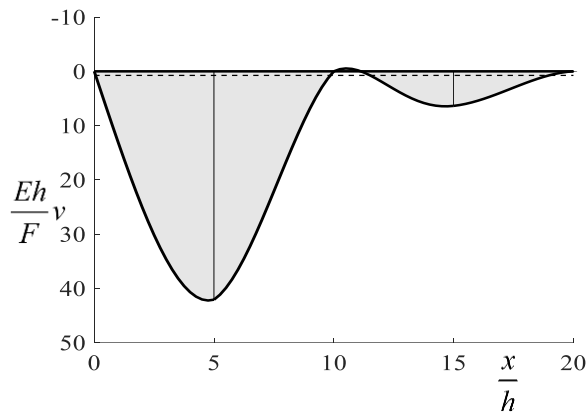
## Esimerkkitehtävä

Tarkastellaan kuvan 1a kahdesta materiaalista koostuvaa kolmitukista palkkia, jota kuormittaa sen neljännespisteessä  $x = 5h$  pistekuorma  $F$  ja välillä  $10h < x < 15h$  tasan jakautunut viivakuorma  $q_0 = F / (5h)$ . Vasemmasta päästään  $x = 0$  palkki on tuettu siten, että sen siirtyminen akselia vastaan kohtisuorassa tasossa ja kiertyminen akselin ympäri on estetty, mutta poikkileikkaus voi käyristyä vapaasti. Keskeltä  $x = 10h$  se on tuettu siten, että sen siirtyminen akselia vastaan kohtisuorassa tasossa on estetty, mutta se voi kiertyä akselin ympäri vapaasti. Oikeasta päästään  $x = 20h$  palkki on tuettu siten, että sen siirtyminen, kiertyminen ja poikkileikkauksen käyristyminen on estetty. Koska pistekuorma  $F$  ja viivakuorma  $q_0$  sijaitsevat etäisyydellä  $e_T$  vääntökeskiöstä T (kuva 1b), kohdistuu niistä palkkiin myös vääntävä pistemomenttikuorma  $-F \cdot e_T$  ja vääntävä tasan jakautunut momenttikuorma  $m_{x0} = -q_0 e_T$ .

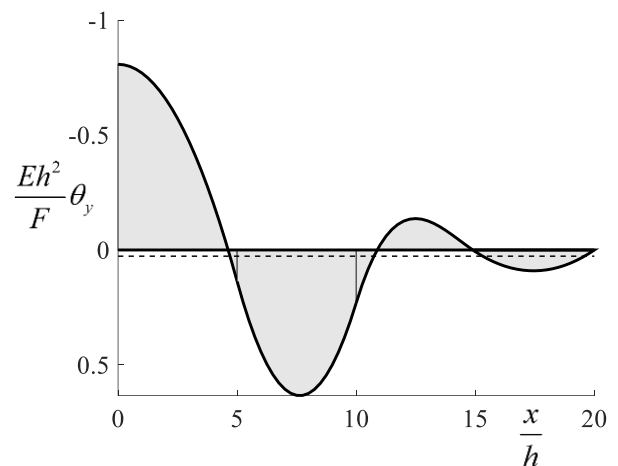
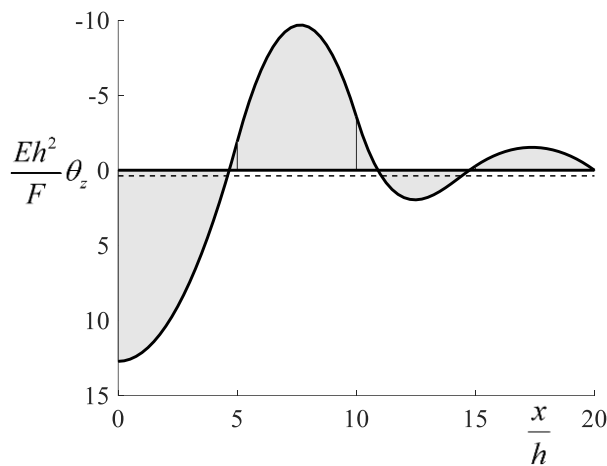
Poikkileikkausanalyysi suoritettiin tässä elementtimenetelmällä käyttäen lineaarisia kolmioelementtejä. Liitteessä F on esitetty poikkileikkauksen käyristymisfunktioiden jakaumat. Sen tuloksena saatiin poikkileikkauksen taivutukseen liittyville jäykkyyksille  $EA \approx 2,777Eh^2$ ,  $EI_y \approx 0,8375Eh^4$ ,  $EI_z \approx 0,2993Eh^4$ ,  $EI_{yz} \approx 0,0543Eh^4$ ,  $GA \approx 1,126Eh^2$  ja leikkauskorjauskertoimille  $k_y = 0,5447$ ,  $k_z \approx 0,3235$ ,  $k_{yz} \approx 0,0053$ . Edelleen saatiin vääntöön liittyville jäykkyyksille  $GJ \approx 0,07793Eh^4$ ,  $EI_\phi \approx 0,1352Eh^5$  ja vääntökeskiön asemalle  $e_T = 0,3278h$ .

Koska rakenteeseen ei kohdistu akselin suuntaista kuormitusta, veto/puristustehtävä antaa nollatuloksen. Taivutustehtävän ratkaisuna on kuvissa 2–5 esitetty taipumien  $v(x)$  ja  $w(x)$ , poikkileikkauksen kiertymien  $\theta_z(x)$  ja  $\theta_y(x)$ , taivutusmomenttien  $M_z(x)$  ja  $M_y(x)$  sekä leikkausvoimien  $Q_y(x)$  ja  $Q_z(x)$  jakaumat. Havaitaan, että vaikka kuormitus on pystysuora, palkki taipuu myös vaakasuunnassa sekä taivutusmomentti  $M_y$  ja leikkausvoima  $Q_z$  ovat nollasta eroavia. Vääntötehtävän ratkaisuna on kuvissa 6–8 esitetty poikkileikkauksen kiertymän  $\theta_x(x)$ , sen derivaatan  $\theta'_x(x)$ , kokonaisvääntömomentin  $M_x(x)$ , Saint-Venantin vääntömomentin  $T(x)$ , käyristymismomentin  $B(x)$  ja sen derivaatan  $B'(x)$  jakaumat.

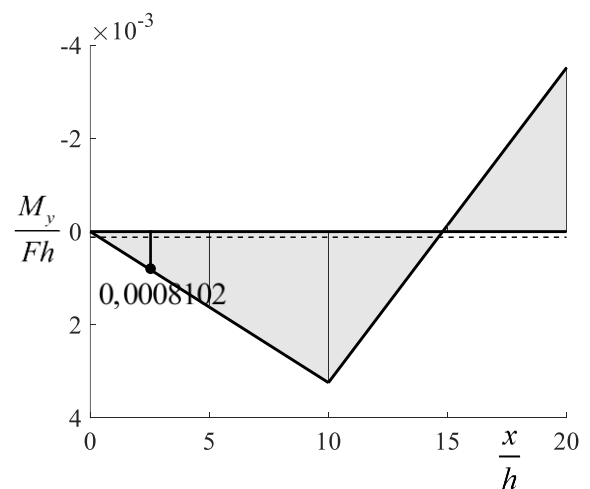
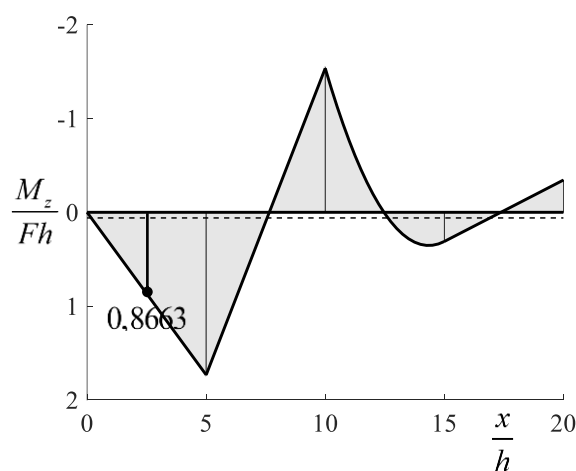
Lopuksi määritettiin jännitysjaakaumat poikkileikkauksessa  $x = 2,5h$  (kuva 1a). Taivutuksen jännitysresultanteille tässä poikkileikkauksessa saatiin  $M_z \approx 0,8663Fh$ ,  $M_y \approx 0,0008102Fh$ ,  $Q_y \approx 0,3465F$  ja  $Q_z \approx 0,00034F$  (kuvat 4 ja 5) sekä väännön jännitysresultanteille saatiin  $T \approx -0,3234Fh$ ,  $B \approx -0,03181Fh^2$  ja  $B' \approx -0,02526Fh$  (kuvat 7 ja 8). Kuvissa 9 ja 10 on esitetty sekä (a) taivutuksesta että (b) väännöstä aiheutuvat normaalijännityksen  $\sigma_x$  ja leikkausjännityksen itseisarvon  $\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2}$  jakaumat tarkasteltavassa poikkileikkauksessa.



Kuva 2. Taipumien  $v(x)$  ja  $w(x)$  jakaumat

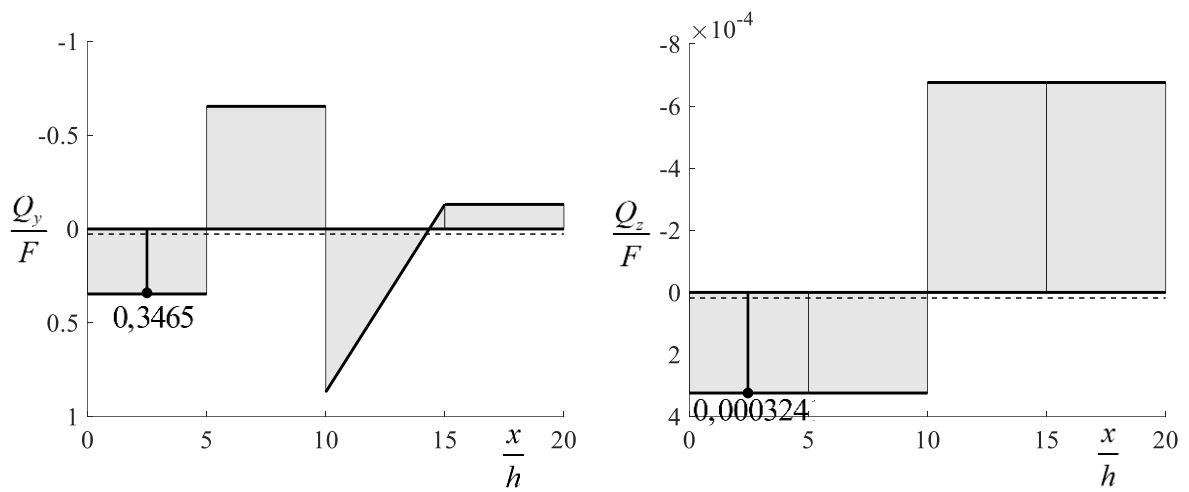


Kuva 3. Poikkileikkauksen kiertymien  $\theta_z(x)$  ja  $\theta_y(x)$  jakaumat

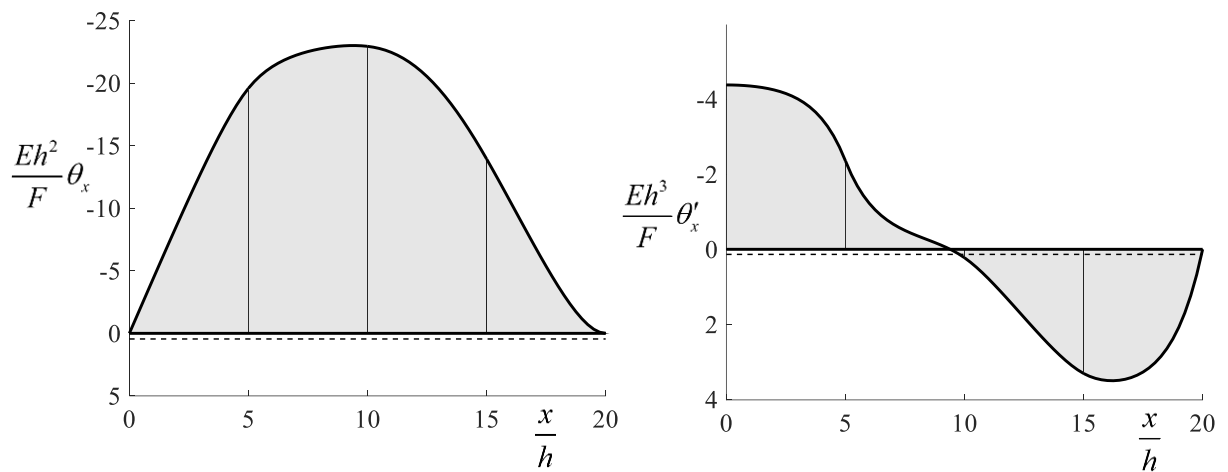


Kuva 4. Tavutusmomenttien  $M_z(x)$  ja  $M_y(x)$  jakaumat sekä niiden arvot tarkasteltavassa poikkileikkauksessa  $x = 2,5h$

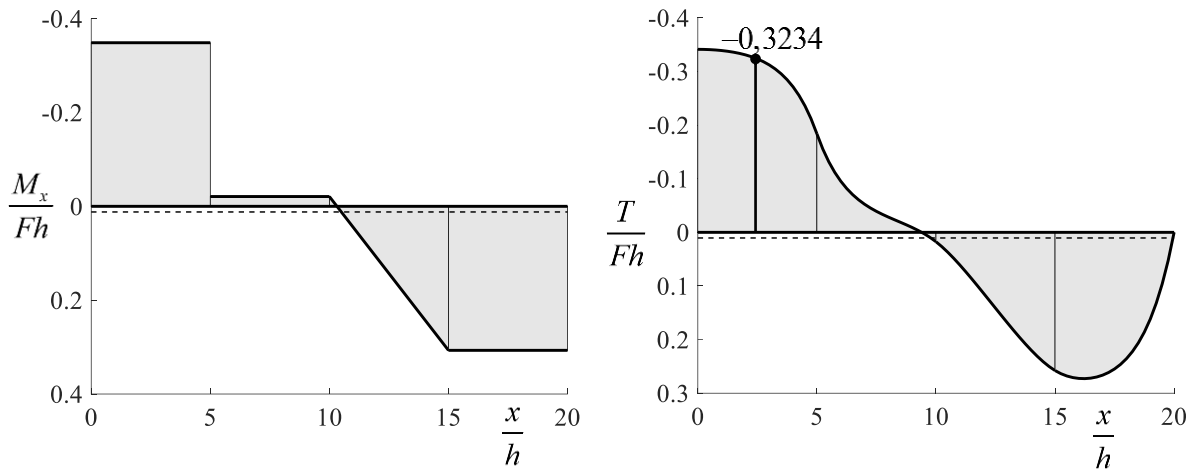




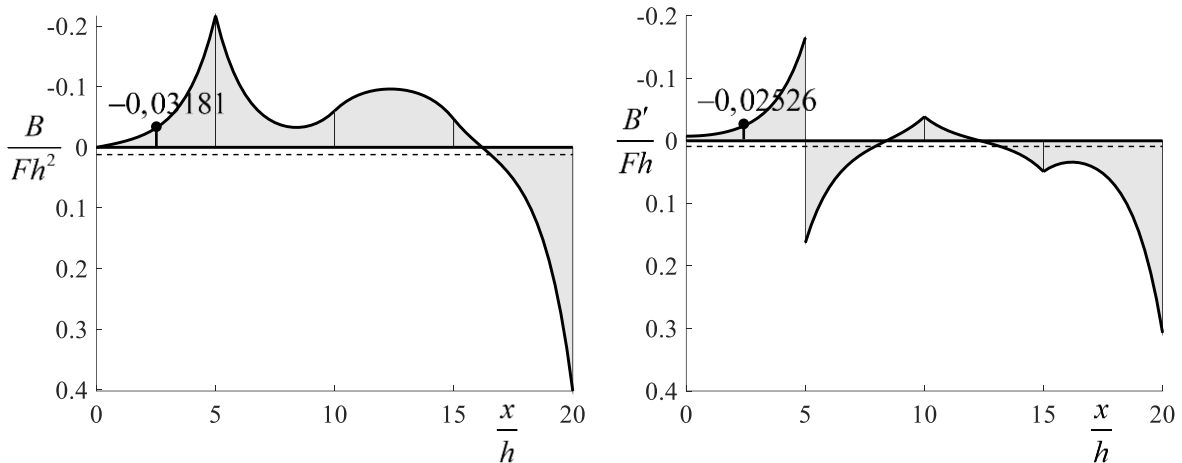
Kuva 5. Leikkausvoimien  $Q_y(x)$  ja  $Q_z(x)$  jakaumat sekä niiden arvot tarkasteltavassa poikkileikkauksessa  $x = 2,5h$



Kuva 6. Poikkileikkauksen kiertymän  $\theta_x(x)$  ja sen derivaatan  $\theta'_x(x)$  (vääntymän) jakaumat



Kuva 7. Kokonaisvääntömomentin  $M_x(x)$  ja Saint-Venantin vääntömomentin  $T(x)$  jakaumat sekä jalkimmäisen arvo tarkasteltavassa poikkileikkauksessa  $x = 2,5h$

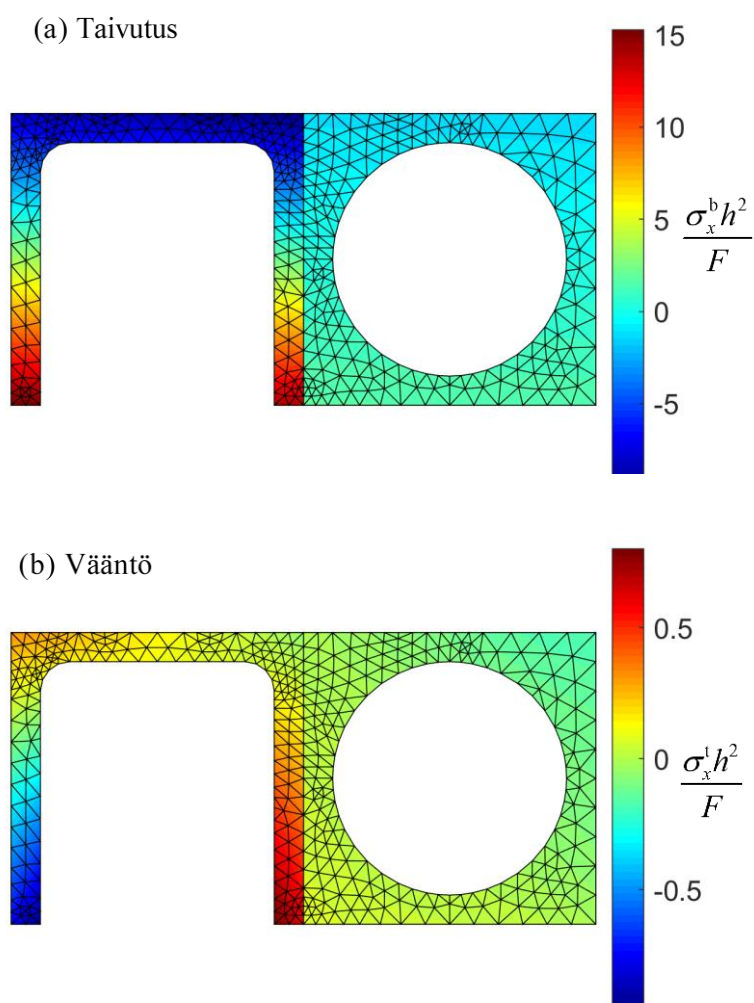


Kuva 8. Käyritysmomentin  $B(x)$  ja sen derivaatan  $B'(x)$  jakaumat sekä niiden arvot tarkasteltavassa poikkileikkauksessa  $x = 2,5h$

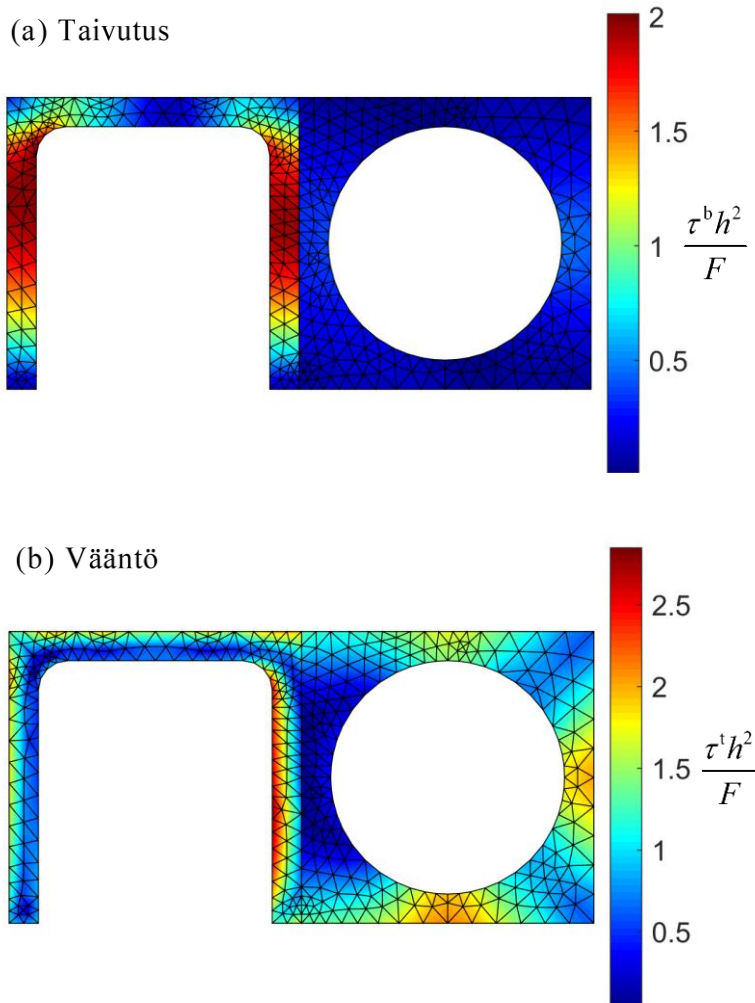
## Johtopäätökset

Artikkelin ensimmäisessä osassa esitettiin teoria, jonka avulla voidaan määrittää taivutetun ja väännetyin suoran palkin siirtymä- ja jännitystilä systemaattisesti ja perinteisiä teorioita tarkemmin. Palkin poikkileikkaus voi olla muodoltaan mielivaltaisen ja koostua myös useammasta materiaalista. Tässä artikkelin toisessa osassa teoriaa sovellettiin käyttäen elementtimenetelmää. Ensimmäiseksi johdettiin elementtiyhtälöt poikkileikkaukseen liittyvien käyritysmomenttien määrittämiseksi. Yksityiskohtaiset lausekkeet elementtimatriisille ja elementtivektoreille esitettiin lineaarisen kolmioelementin tapauksessa. Toiseksi esitettiin, kuinka palkkitehtävän poikkileikkaussuureet voidaan määrittää, kun käyritysmomenttien elementtiapproksimaatiot tunnetaan. Kolmanneksi esitettiin palkkitehtävän analyttinen ratkaisu. Samalla tavalla kuin perinteisissä palkkiteorioissa veto/puristus-, taivutus- ja vääntötehtävät voitiin käsitellä erikseen ja kullakin on olemassa analyttinen ratkaisu. Näihin analyttisiin ratkaisuihin perustuen johdettiin elementit,

joiden avulla saadaan palkkitehtävän tarkka ratkaisu monimutkaisemmissa kuormitus- ja tuentatapauksissa. Neljänneksi esitettiin, kuinka palkin tietyn poikkileikkauksen jännitysjakaumat voidaan määrittää, kun jännitysresultantit ja käyritysfunktioiden elementti-approksimaatiot tunnetaan. Artikkelin lopussa menetelmän eri vaiheita demonstroitettiin laskentaesimerkin avulla.



Kuva 9. (a) Taivutuksesta ja (b) väännöstä syntyvä normaalijännitys



Kuva 10. (a) Taivutuksesta ja (b) väännöstä syntyvä kokonaisleikkausjännitys

## Viitteet

- [1] J. Aalto, Taivutuksesta ja väännöstä, osa I: Teoria, Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics), Vol. 50, Nro 4, 2017, s. 376–404.  
<https://doi.org/10.23998/rm.64856>
- [2] J.S. Przemieniecki, Theory of matrix structural analysis, McGraw-Hill, New York, 1968.
- [3] C.F. Kollbrunner and K. Basler, Torsion in Structures, Springer-Verlag, 1969.

Jukka Aalto

Aalto-yliopisto, Insinööritieteiden korkeakoulu, Rakennustekniikan laitos

PL 12100, 00076 Aalto

[jukka.aalto@aalto.fi](mailto:jukka.aalto@aalto.fi)

## Liitteet

### A Elementtimatriisi ja elementtivektorit lineaarisen kolmioelementin tapauksessa

Tässä tarkastelussa poikkileikkauksen kimmomoduuli  $E$  ja liukumoduuli  $G$  otaksutaan elementin alueella vakioksi. Käytetään hyväksi seuraavia lineaarisen kolmioelementin muotofunktioille  $N_i^e(y, z)$  päteviä tuloksia

$$\frac{\partial N_i^e}{\partial y} = \frac{b_i}{2A^e}, \quad \frac{\partial N_i^e}{\partial z} = \frac{c_i}{2A^e}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_{A^e} N_i^e dA = \frac{A^e}{3}, \quad \int_{A^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} dA = \frac{b_i}{2}, \quad \int_{A^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} dA = \frac{c_i}{2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.2})$$

ja

$$\left. \begin{aligned} \int_{A^e} N_i^e N_j^e dA &= \frac{A^e}{6}, \quad \text{kun } i = j, & \int_{A^e} N_i^e N_j^e dA &= \frac{A^e}{12}, \quad \text{kun } i \neq j \\ \int_{A^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} N_j^e dA &= \frac{b_i}{6}, & \int_{A^e} \frac{\partial N_i^e}{\partial z} N_j^e dA &= \frac{c_i}{6} \end{aligned} \right\} i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.3})$$

Näissä kaavoissa  $A^e$  on elementin pinta-ala ja

$$\begin{aligned} b_1 &= z_2^e - z_3^e, & b_2 &= z_3^e - z_1^e, & b_3 &= z_1^e - z_2^e, \\ c_1 &= y_3^e - y_2^e, & c_2 &= y_1^e - y_3^e, & c_3 &= y_2^e - y_1^e. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Systemimatriisin  $\mathbf{K}$  alkiota (6) vastavan elementtimatriisin  $\mathbf{K}^e$  alkiolle saadaan

$$K_{ij}^e = G^e \int_{A^e} \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} + \frac{\partial N_i^e}{\partial z} \frac{\partial N_j^e}{\partial z} \right) dA = \frac{G^e}{4A^e} (b_i b_j + c_i c_j), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{A.5})$$

Systemivektorin  $\mathbf{R}_\phi$  alkiota (7a) vastavan elementtivektorin  $\mathbf{R}_\phi^e$  alkiolle saadaan

$$R_{\phi i}^e = G^e \int_A \left( \frac{\partial N_i^e}{\partial y} z - \frac{\partial N_i^e}{\partial z} y \right) dA = \frac{G^e}{2A^e} (b_i \int_A z dA - c_i \int_A y dA). \quad (\text{A.6})$$

Sijoittamalla näihin koordinaattien esitykset

$$y = N_1^e y_1^e + N_2^e y_2^e + N_3^e y_3^e, \quad z = N_1^e z_1^e + N_2^e z_2^e + N_3^e z_3^e \quad (\text{A.7})$$

saadaan tulos

$$\begin{aligned} R_{\phi i}^e &= \frac{G^e}{2A^e} [b_i (\int_{A^e} N_1^e dAz_1^e + \int_{A^e} N_2^e dAz_2^e + \int_{A^e} N_3^e dAz_3^e) \\ &\quad - c_i (\int_{A^e} N_1^e dAy_1^e + \int_{A^e} N_2^e dAy_2^e + \int_{A^e} N_3^e dAy_3^e)] \\ &= \frac{G^e}{2} (b_i \bar{z}^e - c_i \bar{y}^e). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Systemivektorin  $\mathbf{R}_x$  alkiota (7b) vastavan elementtivektorin  $\mathbf{R}_x^e$  alkiolle saadaan

$$R_{xi}^e = E^e \int_{A^e} N_i^e \phi dA. \quad (\text{A.9})$$

Sijoittamalla tähän  $\phi$ :n elementtiapproksimaatio

$$\phi = N_1^e \phi_1^e + N_2^e \phi_2^e + N_3^e \phi_3^e \quad (\text{A.10})$$

saadaan edelleen

$$R_{xi}^e = E^e \left( \int_{A^e} N_i^e N_1^e dA \phi_1^e + \int_{A^e} N_i^e N_2^e dA \phi_2^e + \int_{A^e} N_i^e N_3^e dA \phi_3^e \right). \quad (\text{A.11})$$

Koko elementtivektorille  $\mathbf{R}_x^e$  saadaan tulos

$$\mathbf{R}_x^e \equiv \begin{Bmatrix} R_{x1}^e \\ R_{x2}^e \\ R_{x3}^e \end{Bmatrix} = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2\phi_1^e + \phi_2^e + \phi_3^e \\ \phi_1^e + 2\phi_2^e + \phi_3^e \\ \phi_1^e + \phi_2^e + 2\phi_3^e \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Systemivektorin  $\mathbf{R}_y$  alkioita (7c) vastavan elementtivektorin  $\mathbf{R}_y^e$  alkioille saadaan

$$R_{yi}^e = E^e \int_{A^e} N_i^e y dA. \quad (\text{A.13})$$

Sijoittamalla tähän koordinaatin  $y$  elementtiapproksimaatio (A.4) saadaan edelleen

$$R_{yi}^e = E^e \left( \int_{A^e} N_i^e N_1^e dA y_1^e + \int_{A^e} N_i^e N_2^e dA y_2^e + E \int_{A^e} N_i^e N_3^e dA y_3^e \right). \quad (\text{A.14})$$

Koko elementtivektorille  $\mathbf{R}_y^e$  saadaan tulos

$$\mathbf{R}_y^e \equiv \begin{Bmatrix} R_{y1}^e \\ R_{y2}^e \\ R_{y3}^e \end{Bmatrix} = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2y_1^e + y_2^e + y_3^e \\ y_1^e + 2y_2^e + y_3^e \\ y_1^e + y_2^e + 2y_3^e \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

Elementtivektorille  $\mathbf{R}_z^e$  saadaan vastaavasti tulos

$$\mathbf{R}_z^e = \frac{E^e A^e}{12} \begin{Bmatrix} 2z_1^e + z_2^e + z_3^e \\ z_1^e + 2z_2^e + z_3^e \\ z_1^e + z_2^e + 2z_3^e \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.16})$$

## B Poikkileikkaussuureiden elementtiosuudet lineaarisen kolmioelementin tapauksessa

Kimmomoduulilla painotetun pinta-alan momentin  $EA$  elementtiosuudelle saadaan

$$(EA)^e = E^e \int_{A^e} dA = E^e A^e. \quad (\text{B.1})$$

Kimmomoduulilla painotetun staattisen momentin  $ES_z$  elementtiosuudelle saadaan

$$\begin{aligned} (ES_z)^e &= E^e \int_{A^e} y dA = E^e \left( \int_{A^e} N_1^e dAy_1^e + \int_{A^e} N_2^e dAy_2^e + \int_{A^e} N_3^e dAy_3^e \right) = E^e A^e \frac{y_1^e + y_2^e + y_3^e}{3} \\ &= E^e A^e \bar{y}^e, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ja staattisen momentin  $ES_y$  elementtiosuudelle vastaavasti

$$(ES_y)^e = E^e \int_{A^e} z dA = E^e A^e \bar{z}^e. \quad (\text{B.3})$$

Kimmomoduulilla painotetun tulomomentin  $EI_{yz}$  elementtiosuudelle saadaan

$$\begin{aligned} (EI_{yz})^e &= E^e \int_{A^e} yz dA = E^e \int_{A^e} (N_1^e y_1^e + N_2^e y_2^e + N_3^e y_3^e)(N_1^e z_1^e + N_2^e z_2^e + N_3^e z_3^e) dA \\ &= E^e \left[ \int_{A^e} N_1^e N_1^e dAy_1^e z_1^e + \int_{A^e} N_2^e N_2^e dAy_2^e z_2^e + \int_{A^e} N_3^e N_3^e dAy_3^e z_3^e \right. \\ &\quad \left. + \int_{A^e} N_2^e N_3^e dA(y_2^e z_3^e + y_3^e z_2^e) + \int_{A^e} N_2^e N_3^e dA(y_3^e z_1^e + y_1^e y_3^e) + \int_{A^e} N_1^e N_2^e dA(y_1^e z_2^e + y_2^e z_1^e) \right] \\ &= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e z_1^e + 2y_2^e z_2^e + 2y_3^e z_3^e + y_2^e z_3^e + y_3^e z_2^e + y_3^e z_1^e + y_1^e z_3^e + y_1^e z_2^e + y_2^e z_1^e). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Taivutusjäykkyyksien  $EI_z$  ja  $EI_y$  elementtiosuuksille saadaan vastaavaan tapaan tulokset

$$(EI_z)^e = E^e \int_{A^e} y^2 dA = \frac{E^e A^e}{6} (y_1^e y_1^e + y_2^e y_2^e + y_3^e y_3^e + y_2^e y_3^e + y_3^e y_2^e + y_1^e y_2^e) \quad (\text{B.5})$$

ja

$$(EI_y)^e = E^e \int_{A^e} z^2 dA = \frac{E^e A^e}{6} (z_1^e z_1^e + z_2^e z_2^e + z_3^e z_3^e + z_2^e z_3^e + z_3^e z_2^e + z_1^e z_2^e). \quad (\text{B.6})$$

Suureen  $ES_\Phi$  elementtiosuudelle saadaan

$$\begin{aligned} (ES_\Phi)^e &= E^e \int_{A^e} \Phi dA = E^e \left( \int_{A^e} N_1^e dA\Phi_1^e + \int_{A^e} N_2^e dA\Phi_2^e + \int_{A^e} N_3^e dA\Phi_3^e \right) \\ &= E^e A^e \frac{\Phi_1^e + \Phi_2^e + \Phi_3^e}{3} = E^e A^e \bar{\Phi}^e. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Suureen  $EI_{y\Phi}$  elementtiosuudelle saadaan

$$\begin{aligned}
(EI_{y\Phi})^e &= E^e \int_{A^e} z\Phi dA = E^e \int_{A^e} (N_1^e z_1^e + N_2^e z_2^e + N_3^e z_3^e)(N_1^e \Phi_1^e + N_2^e \Phi_2^e + N_3^e \Phi_3^e) dA \\
&= E^e \left( \int_{A^e} N_1^e N_1^e dA z_1^e \Phi_1^e + \int_{A^e} N_2^e N_2^e dA z_2^e \Phi_2^e + \int_{A^e} N_3^e N_3^e dA z_3^e \Phi_3^e \right. \\
&\quad \left. + \int_{A^e} N_2^e N_3^e dA (z_2^e \Phi_3^e + z_3^e \Phi_2^e) + \int_{A^e} N_3^e N_1^e dA (z_3^e \Phi_1^e + z_1^e \Phi_3^e) + \int_{A^e} N_1^e N_2^e dA (z_1^e \Phi_2^e + z_2^e \Phi_1^e) \right) \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Phi_1^e + 2z_2^e \Phi_2^e + 2z_3^e \Phi_3^e + z_2^e \Phi_3^e + z_3^e \Phi_2^e + z_3^e \Phi_1^e + z_1^e \Phi_3^e + z_1^e \Phi_2^e + z_2^e \Phi_1^e).
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Suureen  $EI_{z\Phi}$  elementtiosuudelle saadaan vastaavasti

$$\begin{aligned}
(EI_{z\Phi})^e &= E^e \int_{A^e} y\Phi dA \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Phi_1^e + 2y_2^e \Phi_2^e + 2y_3^e \Phi_3^e + y_2^e \Phi_3^e + y_3^e \Phi_2^e + y_3^e \Phi_1^e + y_1^e \Phi_3^e + y_1^e \Phi_2^e + y_2^e \Phi_1^e).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

Käyritysmisjäykkyyden  $EI_\phi$  elementtiosuudelle saadaan

$$(EI_\phi)^e = E^e \int_{A^e} \phi^2 dA = \frac{E^e A^e}{6} (\phi_1^e \phi_1^e + \phi_2^e \phi_2^e + \phi_3^e \phi_3^e + \phi_2^e \phi_3^e + \phi_3^e \phi_2^e + \phi_3^e \phi_1^e + \phi_1^e \phi_3^e). \tag{B.10}$$

Leikkausjäykkyyden  $GA$  elementtiosuudelle saadaan

$$(GA)^e = G^e \int_{A^e} dA = G^e A^e. \tag{B.11}$$

Vääntöjäykkyyden  $GJ$  elementtiosuudelle saadaan

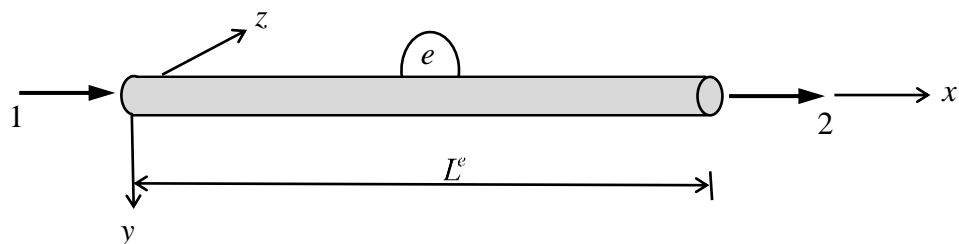
$$\begin{aligned}
(GJ)^e &= G^e \int_{A^e} \left[ -\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)z + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)y \right] dA \\
&= G^e \left[ -\left(\frac{b_1}{2A^e} \Phi_1^e + \frac{b_2}{2A^e} \Phi_2^e + \frac{b_3}{2A^e} \Phi_3^e\right) \int_{A^e} (N_1^e z_1^e + N_2^e z_2^e + N_3^e z_3^e) dA \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{c_1}{2A^e} \Phi_1^e + \frac{c_2}{2A^e} \Phi_2^e + \frac{c_3}{2A^e} \Phi_3^e\right) \int_{A^e} (N_1^e y_1^e + N_2^e y_2^e + N_3^e y_3^e) dA \right] \\
&\quad + G^e \left( \int_{A^e} z^2 dA + \int_{A^e} y^2 dA \right) \\
&= \frac{G^e A^e}{6} [-3(b_1 \Phi_1^e + b_2 \Phi_2^e + b_3 \Phi_3^e) \bar{z}^e + 3(c_1 \Phi_1^e + c_2 \Phi_2^e + c_3 \Phi_3^e) \bar{y}^e \\
&\quad + y_1^e y_1^e + y_2^e y_2^e + y_3^e y_3^e + y_2^e y_3^e + y_3^e y_2^e + y_1^e y_2^e \\
&\quad + z_1^e z_1^e + z_2^e z_2^e + z_3^e z_3^e + z_2^e z_3^e + z_3^e z_2^e + z_3^e z_1^e + z_1^e z_3^e].
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Suureiden  $EI_{y\Psi_y}$ ,  $EI_{z\Psi_y}$ ,  $EI_{y\Psi_z}$  ja  $EI_{z\Psi_z}$  elementtiosuuksille saadaan vastaavaan tapaan



$$\begin{aligned}
(EI_{y\Psi_y})^e &= E^e \int_{A^e} z \Psi_y \, dA \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Psi_{y1}^e + 2z_2^e \Psi_{y2}^e + 2z_3^e \Psi_{y3}^e \\
&\quad + z_2^e \Psi_{y3}^e + z_3^e \Psi_{y2}^e + z_3^e \Psi_{y1}^e + z_1^e \Psi_{y3}^e + z_1^e \Psi_{y2}^e + z_2^e \Psi_{y1}^e), \\
(EI_{z\Psi_y})^e &= E^e \int_{A^e} y \Psi_y \, dA \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Psi_{y1}^e + 2y_2^e \Psi_{y2}^e + 2y_3^e \Psi_{y3}^e \\
&\quad + y_2^e \Psi_{y3}^e + y_3^e \Psi_{y2}^e + y_3^e \Psi_{y1}^e + y_1^e \Psi_{y3}^e + y_1^e \Psi_{y2}^e + y_2^e \Psi_{y1}^e), \\
(EI_{y\Psi_z})^e &= E^e \int_{A^e} z \Psi_z \, dA \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2z_1^e \Psi_{z1}^e + 2z_2^e \Psi_{z2}^e + 2z_3^e \Psi_{z3}^e \\
&\quad + z_2^e \Psi_{z3}^e + z_3^e \Psi_{z2}^e + z_3^e \Psi_{z1}^e + z_1^e \Psi_{z3}^e + z_1^e \Psi_{z2}^e + z_2^e \Psi_{z1}^e), \\
(EI_{z\Psi_z})^e &= E^e \int_{A^e} y \Psi_z \, dA \\
&= \frac{E^e A^e}{12} (2y_1^e \Psi_{z1}^e + 2y_2^e \Psi_{z2}^e + 2y_3^e \Psi_{z3}^e \\
&\quad + y_2^e \Psi_{z3}^e + y_3^e \Psi_{z2}^e + y_3^e \Psi_{z1}^e + y_1^e \Psi_{z3}^e + y_1^e \Psi_{z2}^e + y_2^e \Psi_{z1}^e). \tag{B.13}
\end{aligned}$$

## C Vedetyn/puristetun palkin elementtiratkaisu



Kuva C.1. Vedetyn/puristetun palkkielementin vapausasteet

### C.1 Elementtiyhtälöt

Aksiaalisen siirtymän differentiaaliyhtälön (32) yleinen ratkaisu (34) voidaan esittää muodossa

$$u(x) = [x \quad 1] \mathbf{C} + u_0(x), \quad (\text{C.1})$$

missä

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Sitä vastaten saadaan normaalivoimalle elementin alueella kaavalla (33)

$$N(x) = EA[1 \quad 0] \mathbf{C} + N_0(x), \quad (\text{C.3})$$

missä suuretta

$$N_0(x) = EAu'_0(x) \quad (\text{C.4})$$

kutsutaan tässä yksityisratkaisua  $u_0(x)$  vastaavaksi normaalivoimaksi. Yhteensopivuusehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

ja niistä seuraa vapausastesiirtymien ja integrointivakioiden välille yhtälö

$$\mathbf{a}^e = \mathcal{A} \mathbf{C} + \mathbf{a}_0, \quad (\text{C.6})$$

missä

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ L^e & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} u_0(0) \\ u_0(L^e) \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

Tasapainoehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -N(0) \\ N(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

ja niistä seuraa vapausastevoimien ja integrointivakioiden välille yhtälö

$$\mathbf{F}^e = \mathcal{B} \mathbf{C} + \mathcal{F}_0 \quad (\text{C.9})$$

missä

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B} = EA \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_0 = \begin{Bmatrix} -N_0(0) \\ N_0(L^e) \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.10})$$

Yhtälöistä (C.6) saadaan integrointivakioille

$$\mathbf{C} = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{a}^e - \mathbf{a}_0). \quad (\text{C.11})$$

Yhtälöistä (C.9) ja (C.11) seuraa elementin vapausastevoimien ja -siirtymien välille yhtälö

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{R}^e, \quad (\text{C.12})$$

missä

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}\mathcal{A}^{-1} \quad (\text{C.13})$$

on elementin jäykkyyismatriisi ja

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}_0 - \mathcal{F}_0 \quad (\text{C.14})$$

on elementin kuormitusvektori. Matriisin  $\mathcal{A}$  käänteismatriisi on

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{L^e} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L^e & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.15})$$

Elementin jäykkyyismatriisille saadaan kaavalla (C.13) yksinkertainen tulos

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.16})$$

Kun rakenne on analysoitu ja elementin vapausastesiirtymät  $\mathbf{a}^e$  tunnetaan, voidaan integrointivakiot määrittää kaavalla (C.11). Sen jälkeen voidaan aksiaalisen siirtymän ja normaalivoiman jakaumat elementin alueella määrittää kaavoilla (C.1) ja (C.3).

## C.2 Elementin kuormitusvektori lineaarisesti jakautuneen kuormituksen tapauksessa

Johdetaan lopuksi elementin kuormitusvektorille yksinkertainen tulos siinä tapauksessa, että aksiaalinen jakautunut kuorma  $q_x(x)$  on elementin alueella lineaarinen ja muotoa (35). Yksityisratkaisu (36) elementtiin  $e$  sovellettuna on

$$u_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{q_{x1}^e}{EA} x^2 - \frac{1}{6} \frac{q_{x2}^e - q_{x1}^e}{L^e EA} x^3 \quad (\text{C.17})$$

ja sitä vastaavalle normaalivoimalle (C.4) saadaan

$$N_0(x) = -q_{x1}^e x - \frac{q_{x2}^e - q_{x1}^e}{2L^e} x^2. \quad (\text{C.18})$$

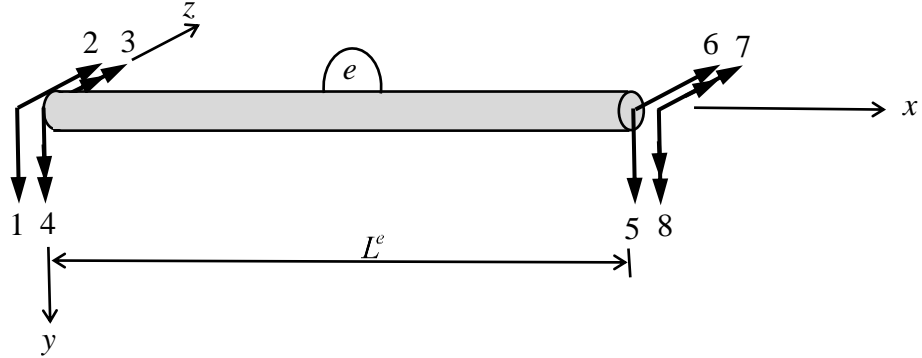
Saadaan

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{L^{e2}}{EA} \left( \frac{q_{x1}^e}{3} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{q_{x2}^e}{6} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right), \quad \mathcal{F}_0 = -\frac{L^e}{2} \left( q_{x1}^e \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + q_{x2}^e \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \right) \quad (\text{C.19})$$

ja elementin kuormitusvektorille kaavalla (C.14) tulos

$$\mathbf{R}^e = \frac{L^e}{6} \left( q_{x1}^e \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \end{Bmatrix} + q_{x2}^e \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix} \right). \quad (\text{C.20})$$

## D Taivutetun palkin elementtiratkaisu



Kuva D.1. Taivutetun palkkielementin vapausasteet

### D.1 Elementtiyhtälöt

Differentiaaliyhtälön (49) yleinen ratkaisu (50) esitetään tässä muodossa

$$\mathbf{v}(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{x^3}{6} & \mathbf{I} \frac{x^2}{2} & \mathbf{I}x & \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{C} + \mathbf{v}_0(x), \quad (\text{D.1})$$

missä

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{C}_4 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

on integrointivakioista muodostettu pystyvektori,  $\mathbf{C}_i$ ,  $i=1,2,3,4$  ovat sen alipystyvektoreita,

$$\mathbf{v}_0(x) = \begin{Bmatrix} v_0(x) \\ w_0(x) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.3})$$

on kuormituksia  $\mathbf{q}(x)$  ja  $\mathbf{m}(x)$  vastaava yksityisratkaisu ja  $\mathbf{I}$  on  $2 \times 2$  yksikkömatriisi. Sijoittamalla lauseke (D.1) kaavoihin (48), (47) ja (46) saadaan poikkileikkauksen kiertymisille, leikkausvoimille ja taivutusmomenteille ja lausekkeet

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{x^2}{2} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} & \mathbf{I}x & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{C} + \Theta_0(x), \quad (\text{D.4})$$

$$\mathbf{Q}(x) = -\mathbf{B}[\mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \mathbf{C} + \mathbf{Q}_0(x), \quad (\text{D.5})$$

$$\mathbf{M}(x) = -\mathbf{B}[\mathbf{I}x \ \mathbf{I} \ \mathbf{0} \ \mathbf{0}] \mathbf{C} + \mathbf{M}_0(x), \quad (\text{D.6})$$

missä

$$\Theta_0 = \mathbf{v}'_0 + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{v}_0''' + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}', \quad (\text{D.7})$$

$$\mathbf{Q}_0 = -\mathbf{B}(\mathbf{v}_0''' + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{q}') + \mathbf{m}, \quad (\text{D.8})$$

$$\mathbf{M}_0 = -\mathbf{B}(\mathbf{v}_0'' + \mathbf{S}^{-1}\mathbf{q}) \quad (\text{D.9})$$

ovat yksityisratkaisua  $\mathbf{v}_0(x)$  vastaavat poikkileikkauksen kiertymät, leikkausvoimat ja taivutusmomentit. Yhteensopivuusehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \mathbf{a}_3^e \\ \mathbf{a}_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}(0) \\ \Theta(0) \\ \mathbf{v}(L^e) \\ \Theta(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

ja niistä seuraa vapausasteesiirtymien ja integrointivakioiden välille yhtälöt

$$\mathbf{a}^e = \mathcal{A}\mathbf{C} + \mathbf{a}_0, \quad (\text{D.11})$$

missä

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^e \\ \mathbf{a}_2^e \\ \mathbf{a}_3^e \\ \mathbf{a}_4^e \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \frac{L^{e3}}{6}\mathbf{I} & \frac{L^{e2}}{2}\mathbf{I} & L^e\mathbf{I} & \mathbf{I} \\ \frac{L^{e2}}{2}\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{S}^{-1} & L^e\mathbf{I} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_0(0) \\ \Theta_0(0) \\ \mathbf{v}_0(L^e) \\ \Theta_0(L^e) \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.12})$$

Tasapainoehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e \\ \mathbf{F}_2^e \\ \mathbf{F}_3^e \\ \mathbf{F}_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\mathbf{Q}(0) \\ \mathbf{M}(0) \\ \mathbf{Q}(L^e) \\ -\mathbf{M}(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

ja niistä seuraa vapausastevoimien ja integrointivakioiden välille yhtälöt

$$\mathbf{F}^e = \mathcal{B}\mathbf{C} + \mathcal{F}_0, \quad (\text{D.14})$$

missä

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1^e \\ \mathbf{F}_2^e \\ \mathbf{F}_3^e \\ \mathbf{F}_4^e \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ L^e & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F}_0 = \begin{Bmatrix} -\mathbf{Q}_0(0) \\ \mathbf{M}_0(0) \\ \mathbf{Q}_0(L^e) \\ -\mathbf{M}_0(L^e) \end{Bmatrix}. \quad (\text{D.15})$$

Yhtälöistä (D.11) saadaan integrointivakioille

$$\mathbf{C} = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{a}^e - \mathbf{a}_0). \quad (\text{D.16})$$

Yhtälöistä (D.14) ja (D.16) seuraa elementin vapausastevoimien ja -siirtymien välille yhtälö

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{R}^e, \quad (\text{D.17})$$

missä

$$\mathbf{K}^e = \mathcal{B}\mathcal{A}^{-1} \quad (\text{D.18})$$

on elementin jäykkyysmatriisi ja

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}_0 - \mathcal{F}_0 \quad (\text{D.19})$$

on elementin kuormitusvektori. Matriisin  $\mathcal{A}$  käänteismatriisi on

$$\mathcal{A}^{-1} = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & -\frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} \\ -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & -\frac{1}{L^e} (4\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}) & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & -\frac{1}{L^e} (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{1}{L^e} \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{I} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} & \frac{1}{L^e} \boldsymbol{\varphi} & -\frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.20})$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{12}{L^2} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B}. \quad (\text{D.21})$$

Elementin jäykkymatriisille saadaan kaavalla (D.18)

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}(\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi})^{-1} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & -\frac{12}{L^3} \mathbf{I} & \frac{6}{L^2} \mathbf{I} \\ \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (4\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}) & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{12}{L^3} \mathbf{I} & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{12}{L^3} \mathbf{I} & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} \\ \frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (2\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) & -\frac{6}{L^2} \mathbf{I} & \frac{1}{L^e} (4\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi}) \end{bmatrix}. \quad (\text{D.22})$$

Kun rakenne on analysoitu ja elementin vapausastesiirtymät  $\mathbf{a}^e$  tunnetaan, voidaan integrointivakiot määrittää kaavalla (D.16). Sen jälkeen voidaan taipumien, poikkileikkauksen kiertymien, leikkausvoimien ja taivutusmomenttien jakaumat elementin alueella määrittää kaavoilla (D.1), (D.4), (D.5) ja (D.6).

## D.2 Elementin kuormitusvektori lineaarisesti jakautuneen kuormituksen tapauksessa

Johdetaan lopuksi elementin kuormitusvektorille yksinkertainen tulos siinä tapauksessa, että kuormat  $\mathbf{q}(x)$  ja  $\mathbf{m}(x)$  jakautuvat lineaarisesti elementin alueella. Yksityisratkaisu (53) elementtiin  $e$  sovellettuna on

$$\mathbf{v}_0(x) = \mathbf{B}^{-1} \left[ \left( \frac{x^4}{24} - \frac{x^5}{120L^e} \right) \mathbf{q}_1^e + \frac{x^5}{120L^e} \mathbf{q}_2^e + \frac{x^4}{24L^e} (\mathbf{m}_2^e - \mathbf{m}_1^e) \right]. \quad (\text{D.23})$$

Kaavoista (D.7), (D.8) ja (D.9) saadaan

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Theta}_0 = & \left[ \left( \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{24L^e} \right) \mathbf{B}^{-1} + \left( x - \frac{x^2}{2L^e} \right) \mathbf{S}^{-1} - \frac{1}{L^e} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right] \mathbf{q}_1^e \\ & + \left( \frac{x^4}{24L^e} \mathbf{B}^{-1} + \frac{x^2}{2L^e} \mathbf{S}^{-1} + \frac{1}{L^e} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right) \mathbf{q}_2^e + \left( \frac{x^3}{6L^e} \mathbf{B}^{-1} + \frac{x}{L^e} \mathbf{S}^{-1} \right) (\mathbf{m}_2^e - \mathbf{m}_1^e), \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

$$\mathbf{M}_0 = \left[ \left( -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6L^e} \right) \mathbf{I} + \frac{x}{L^e} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} - \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right] \mathbf{q}_1^e - \left( \frac{x^3}{6L^e} \mathbf{I} + \frac{x}{L^e} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right) \mathbf{q}_2^e - \left( \frac{x^2}{2L^e} + x \right) (\mathbf{m}_2^e - \mathbf{m}_1^e), \quad (\text{D.25})$$

$$\mathbf{Q}_0 = \left[ \left( -x + \frac{x^2}{2L^e} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{L^e} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right] \mathbf{q}_1^e - \left( \frac{x^2}{2L^e} \mathbf{I} + \frac{1}{L^e} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \right) \mathbf{q}_2^e + \mathbf{m}_1^e \quad (\text{D.26})$$

ja kaavoista (D.12c) ja (D.15c) edelleen

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{B}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\frac{L^{e3}}{144} \boldsymbol{\varphi}^2 \\ \frac{L^{e4}}{30} \mathbf{I} \\ \left( \frac{1}{8} \mathbf{I} + \frac{1}{24} \boldsymbol{\varphi} - \frac{1}{144} \boldsymbol{\varphi}^2 \right) L^{e3} \end{array} \right\} \mathbf{q}_1^e + \mathbf{B}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \frac{L^{e3}}{144} \boldsymbol{\varphi}^2 \\ \frac{L^{e4}}{120} \mathbf{I} \\ \left( \frac{1}{24} \mathbf{I} + \frac{1}{24} \boldsymbol{\varphi} + \frac{1}{144} \boldsymbol{\varphi}^2 \right) L^{e3} \end{array} \right\} \mathbf{q}_2^e \quad (\text{D.27a})$$

$$+ \mathbf{B}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{L^{e3}}{24} \mathbf{I} \\ -\left( \frac{1}{6} \mathbf{I} + \frac{1}{12} \boldsymbol{\varphi} \right) L^{e2} \end{array} \right\} \mathbf{m}_1^e + \mathbf{B}^{-1} \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{L^{e3}}{24} \mathbf{I} \\ \left( \frac{1}{6} \mathbf{I} + \frac{1}{12} \boldsymbol{\varphi} \right) L^{e2} \end{array} \right\} \mathbf{m}_2^e,$$

$$\mathcal{F}_0 = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{L^e}{12} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^{e2}}{12} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^e}{2} \mathbf{I} + \frac{L^e}{12} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^{e2}}{3} \mathbf{I} \end{array} \right\} \mathbf{q}_1^e + \left\{ \begin{array}{c} \frac{L^e}{12} \boldsymbol{\varphi} \\ \mathbf{0} \\ -\frac{L^e}{2} \mathbf{I} - \frac{L^e}{12} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^{e2}}{6} \mathbf{I} + \frac{L^{e2}}{12} \boldsymbol{\varphi} \end{array} \right\} \mathbf{q}_2^e + \left\{ \begin{array}{c} -\mathbf{I} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \\ -\frac{L^e}{2} \mathbf{I} \end{array} \right\} \mathbf{m}_1^e + \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \frac{L^e}{2} \mathbf{I} \end{array} \right\} \mathbf{m}_2^e. \quad (\text{D.27b})$$

Elementin kuormitusvektorille saadaan kaavalla (D.19) tulos

$$\mathbf{R}^e = (\mathbf{I} + \boldsymbol{\varphi})^{-1} \left( \begin{array}{c} \frac{7L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{3} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^{e2}}{20} \mathbf{I} + \frac{L^{e2}}{24} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{3L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{6} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^{e2}}{30} \mathbf{I} - \frac{L^{e2}}{24} \boldsymbol{\varphi} \end{array} \right) \mathbf{q}_1^e + \left( \begin{array}{c} \frac{3L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{6} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{L^{e2}}{30} \mathbf{I} + \frac{L^{e2}}{24} \boldsymbol{\varphi} \\ \frac{7L^e}{20} \mathbf{I} + \frac{L^e}{3} \boldsymbol{\varphi} \\ -\frac{L^{e2}}{20} \mathbf{I} - \frac{L^{e2}}{24} \boldsymbol{\varphi} \end{array} \right) \mathbf{q}_2^e + \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ -\frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \end{array} \right) \mathbf{m}_1^e + \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \mathbf{I} \\ \frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \\ -\frac{1}{2} \mathbf{I} \\ -\frac{L^e}{12} (\mathbf{I} - \boldsymbol{\varphi}) \end{array} \right) \mathbf{m}_2^e \quad (\text{D.28})$$

### D.3 Symmetrinen poikkileikkaus

Tarkastellaan lopuksi  $y$ -akselin suhteen symmetristä poikkileikkausta. Tällöin  $EI_{yz} = 0$  ja  $k_{yz} = 0$ , joten taivutus- ja leikkausjäykkymatriiseille saadaan

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} EI_z & 0 \\ 0 & EI_y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = GA \begin{bmatrix} k_y & 0 \\ 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (\text{D.29})$$

ja matriisille  $\boldsymbol{\varphi}$  edelleen

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_z & 0 \\ 0 & \varphi_y \end{bmatrix}, \quad (\text{D.30})$$

missä

$$\varphi_z = \frac{12EI_z}{k_y GAL^2}, \quad \varphi_y = \frac{12EI_y}{k_z GAL^2}. \quad (\text{D.31})$$

Elementtiyhtälön (D.17) 1., 3., 5. ja 7. yhtälö voidaan nyt saattaa muotoon

$$\mathbf{F}_y^e = \mathbf{K}_y^e \mathbf{a}_y^e - \mathbf{R}_y^e, \quad (\text{D.32})$$

missä

$$\mathbf{F}_y^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_3^e \\ F_5^e \\ F_7^e \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{a}_y^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_3^e \\ a_5^e \\ a_7^e \end{Bmatrix}, \quad (\text{D.33})$$

ja elementin jäykkymatriisi ja kuormitusvektori ovat

$$\mathbf{K}_y^e = \frac{EI_z}{1 + \varphi_z} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4 + \varphi_z}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2 - \varphi_z}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2 - \varphi_z}{L} & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4 + \varphi_z}{L} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.34})$$

ja

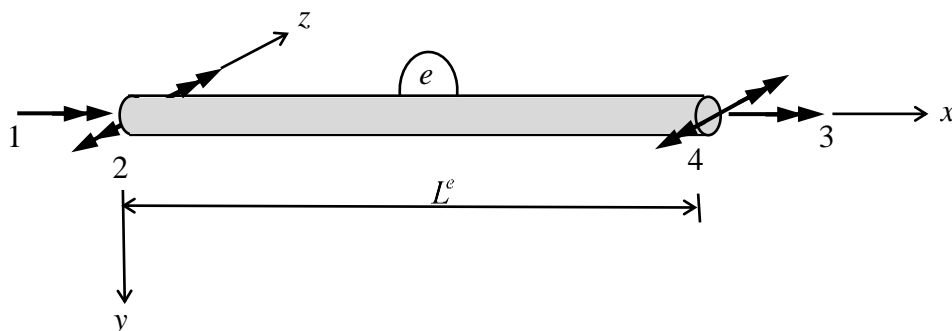
$$\mathbf{R}_y^e = \frac{1}{1 + \varphi_z} \left\{ \begin{matrix} \frac{7L^e}{20} + \frac{L^e}{3}\varphi_z \\ \frac{L^{e2}}{20} + \frac{L^{e2}}{24}\varphi_z \\ \frac{3L^e}{20} + \frac{L^e}{3}\varphi_z \\ -\frac{L^{e2}}{30} - \frac{L^{e2}}{24}\varphi_z \end{matrix} \right\} q_{y1}^e + \left\{ \begin{matrix} \frac{3L^e}{20} + \frac{L^e}{6}\varphi_z \\ \frac{L^{e2}}{30} + \frac{L^{e2}}{24}\varphi_z \\ \frac{7L^e}{20} + \frac{4L^e}{3}\varphi_z \\ -\frac{L^{e2}}{20} - \frac{L^{e2}}{24}\varphi_z \end{matrix} \right\} q_{y1}^e + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{L^e}{12}(1 - \varphi_z) \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{L^e}{12}(1 - \varphi_z) \end{matrix} \right\} m_{z1}^e + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{2} \\ \frac{L^e}{12}(1 - \varphi_z) \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{L^e}{12}(1 - \varphi_z) \end{matrix} \right\} m_{z2}^e. \quad (\text{D.35})$$

Elementtiyhtälön (D.17) 2., 4., 6. ja 8. yhtälöistä saadaan kaavoja (D.32), (D.34) ja (D.35)



vastaava tulos. Havaitaan, että tässä tapauksessa taivutukset  $x, y$  – tasossa ja  $x, z$  – tasossa eivät ole kytkettyjä ja ne voidaan käsitellä erikseen. Elementin jäykkyysmatriisi (D.34) on johdettu lähteessä [2] ja esitetty sen kaavassa (5.119). Tässä lähteessä on myös esitetty elementti vedetylle/puristetulle, väännetylle ja kahteen suuntaan taivutetulle palkille. Sen jäykkyysmatriisi on kaava (5.116). Siinä on kuitenkin rajoitettu Saint-Venantin vääntöön sekä poikkileikkaukseen, jossa  $EI_{yz} = 0$  ja  $k_{yz} = 0$ . Tässä esitetty taivutusteoria on yleisempi ja soveltuu siis myös palkkeihin, joiden poikkileikkaus on epäsymmetrinen.

## E Väännetyin palkin elementtiratkaisu



Kuva E.1. Väännetyin palkkielementin vapausasteet

### E.1 Elementtiyhälöt

Vääntökulman  $\theta_x(x)$  differentiaaliyhtälön (54) yleinen ratkaisu (59) esitetään tässä muodossa

$$\theta_x(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & \sinh\left(\frac{k}{L^e}x\right) & \cosh\left(\frac{k}{L^e}x\right) \end{bmatrix} \mathbf{C} + \theta_{x0}(x), \quad (\text{E.1})$$

missä

$$k = L^e \sqrt{\frac{GJ}{EI_\phi}}, \quad (\text{E.2})$$

$L^e$  on elementin pituus ja

$$\mathbf{C} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{Bmatrix}. \quad (\text{E.3})$$

Sitä vastaten saadaan vääntökulman derivaatalle

$$\theta'_x(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{k}{L^e} \cosh\left(\frac{k}{L^e}x\right) & \frac{k}{L^e} \sinh\left(\frac{k}{L^e}x\right) \end{bmatrix} \mathbf{C} + \theta'_{x0}(x), \quad (\text{E.4})$$

Saint-Venantin vääntömomentille kaavalla (56)

$$T(x) \equiv GJ\theta'_x(x) = GJ \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{k}{L^e} \cosh\left(\frac{k}{L^e}x\right) & \frac{k}{L^e} \sinh\left(\frac{k}{L^e}x\right) \end{bmatrix} \mathbf{C} + T_0(x), \quad (\text{E.5})$$

käristymismomentille kaavalla (57)

$$B(x) \equiv -EI_\phi\theta''_x(x) = -GJ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sinh\left(\frac{k}{L^e}x\right) & \cosh\left(\frac{k}{L^e}x\right) \end{bmatrix} \mathbf{C} + B_0(x) \quad (\text{E.6})$$

ja kokonaisvääntömomentille kaavalla (58)

$$M_x(x) \equiv B'(x) + T(x) = GJ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{C} + M_{x0}(x). \quad (\text{E.7})$$

Näissä lausekkeissa suureita

$$T_0(x) = GJ\theta'_{x0}(x), \quad (\text{E.8})$$

$$B_0(x) = -EI_\phi \theta''_{x0}(x) \quad (\text{E.9})$$

ja

$$M_{x0}(x) = -EI_\phi \theta'''_{x0}(x) + GJ \theta'_{x0}(x) \quad (\text{E.10})$$

kutsutaan tässä yksityisratkaisua  $\theta_{x0}(x)$  vastaaviksi Saint-Venantin vääntömomentiksi, käyritysmomentiksi ja kokonaisvääntömomentiksi.

Yhteensopivuusehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x(0) \\ \theta'_x(0) \\ \theta_x(L^e) \\ \theta'_x(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.11})$$

ja niistä seuraa vapausasteesiirtymien ja integrointivakioiden välille yhtälöt

$$\mathbf{a}^e = \mathcal{A}\mathbf{C} + \mathbf{a}_0, \quad (\text{E.12})$$

missä

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{k}{L^e} & 0 \\ 1 & L^e & \text{sh} & \frac{k}{L^e} \\ 0 & 1 & \frac{k}{L^e} \text{ch} & \frac{k}{L^e} \text{sh} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} \theta_{x0}(0) \\ \theta'_{x0}(0) \\ \theta_{x0}(L^e) \\ \theta'_{x0}(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.13})$$

ja otettiin käyttöön lyhennysmerkinnät  $\text{sh} = \sinh k$  ja  $\text{ch} = \cosh k$ . Tasapainoehdot elementin päissä ovat

$$\begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -M_x(0) \\ B(0) \\ M_x(L^e) \\ -B(L^e) \end{Bmatrix} \quad (\text{E.14})$$

ja niistä seuraa vapausastevoimien ja integrointivakioiden välille yhtälöt

$$\mathbf{F}^e = \mathcal{B}\mathbf{C} + \mathcal{F}_0, \quad (\text{E.15})$$

missä

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \end{Bmatrix}, \quad \mathcal{B} = GJ \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{sh} & \text{ch} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_0 = \begin{Bmatrix} -M_{x0}(0) \\ B_0(0) \\ M_{x0}(L^e) \\ -B_0(L^e) \end{Bmatrix}. \quad (\text{E.16})$$

Yhtälöistä (E.12) saadaan integrointivakioiksi

$$\mathbf{C} = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{a}^e - \mathbf{a}_0). \quad (\text{E.17})$$

Yhtälöistä (E.15) ja (E.17) seuraa elementin vapausastevoimien ja -siirtymien välille yhtälö

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e - \mathbf{R}^e, \quad (\text{E.18})$$

missä

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{B}\mathbf{A}^{-1} \quad (\text{E.19})$$

on elementin jäykkyydsmatriisi ja

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}_0 - \mathcal{F}_0 \quad (\text{E.20})$$

on elementin kuormitusvektori. Matriisin  $\mathcal{A}$  käänteismatriisiksi saadaan

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{1}{2 + k \operatorname{sh} - 2 \operatorname{ch}} \begin{bmatrix} k \operatorname{sh} + 1 - \operatorname{ch} & \frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) & 1 - \operatorname{ch} & \frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) \\ -\frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} & \frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} \\ \operatorname{sh} & -\frac{L^e}{k} (\operatorname{ch} - 1 - k \operatorname{sh}) & -\operatorname{sh} & \frac{L^e}{k} (\operatorname{ch} - 1) \\ 1 - \operatorname{ch} & -\frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) & \operatorname{ch} - 1 & -\frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.21})$$

Elementin jäykkyydsmatriisiksi saadaan kaavalla (E.20) tulos

$$\mathbf{K}^e = \frac{GJ}{2 + k \operatorname{sh} - 2 \operatorname{ch}} \begin{bmatrix} \frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & \operatorname{ch} - 1 & -\frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & \operatorname{ch} - 1 \\ \operatorname{ch} - 1 & \frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) & 1 - \operatorname{ch} & \frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) \\ -\frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} & \frac{k}{L^e} \operatorname{sh} & 1 - \operatorname{ch} \\ \operatorname{ch} - 1 & \frac{L^e}{k} (\operatorname{sh} - k) & 1 - \operatorname{cosh} k & \frac{L^e}{k} (k \operatorname{ch} - \operatorname{sh}) \end{bmatrix}. \quad (\text{E.22})$$

Kun rakenne on analysoitu ja elementin vapausastesiirtymät  $\mathbf{a}^e$  tunnetaan, voidaan integrointivakiot määrittää kaavalla (E.17). Sen jälkeen voidaan vääntökulman, vääntökulman derivaatan, Saint-Venantin vääntömomentin, käyritysmomentin ja kokonaisvääntömomentin jakaumat elementin alueella määrittää kaavoilla (E.1), (E.4), (E.5), (E.6) ja (E.7).

## E.2 Elementin kuormitusvektori lineaarisesti jakautuneen kuormituksen tapauksessa

Johdetaan lopuksi elementin kuormitusvektorille yksinkertainen tulos siinä tapauksessa, että kuormat  $m_x(x)$  ja  $b(x)$  jakautuvat lineaarisesti elementin alueella. Yksityisratkaisu (64) elementtiin  $e$  sovellettuna on

$$\theta_{x0}(x) = \left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{GJ} + \frac{1}{6} \frac{x^3}{L^e GJ}\right) m_{x1}^e - \frac{1}{6} \frac{x^3}{L^e GJ} m_{x2}^e + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^e GJ} b_1^e - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^e GJ} b_2^e \quad (\text{E.23})$$

ja sitä vastaaville suureille saadaan

$$\begin{aligned}
\theta'_{x0}(x) &= \frac{L^e}{GJ} \left( \frac{x}{L^e} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^{e2}} \right) m_{x1}^e - \frac{1}{2} \frac{L^e}{GJ} \frac{x^2}{L^{e2}} m_{x2}^e + \frac{1}{GJ} \frac{x}{L^e} b_1^e - \frac{1}{GJ} \frac{x}{L^e} b_1^e, \\
M_{x0}(x) &= \left( \frac{1}{k^2} - \frac{x}{L^e} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^{e2}} \right) L^e m_{x1}^e + \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{L^{e2}} \right) L^e m_{x2}^e + \frac{x}{L^e} b_1^e - \frac{x}{L^e} b_2^e, \\
B_0(x) &= \frac{L^{e2}}{k^2} \left[ \left( 1 - \frac{x}{L^e} \right) m_{x1}^e + \frac{x}{L^e} m_{x2}^e - \frac{1}{L^e} b_1^e + \frac{1}{L^e} b_2^e \right].
\end{aligned} \tag{E.24}$$

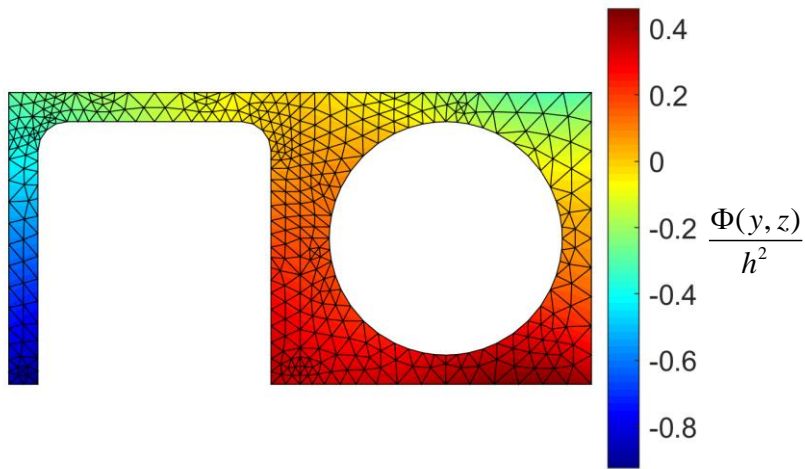
Saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_0 &= \frac{1}{GJ} \left( \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^{e2}}{3} \\ \frac{L^e}{2} \end{Bmatrix} m_{x1}^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^{e2}}{6} \\ -\frac{L^e}{2} \end{Bmatrix} m_{x2}^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{L^e}{2} \\ 1 \end{Bmatrix} b_1^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{L^e}{2} \\ -1 \end{Bmatrix} b_2^e \right), \\
\mathcal{F}_0 &= \begin{Bmatrix} -\frac{L^e}{k^2} \\ \frac{L^{e2}}{k^2} \\ \frac{2-k^2}{2k^2} L^e \\ 0 \end{Bmatrix} m_{x1}^e + \begin{Bmatrix} -\frac{L^e}{k^2} \\ 0 \\ \frac{2-k^2}{2k^2} L^e \\ \frac{L^{e2}}{k^2} \end{Bmatrix} m_{x2}^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{L^e}{k^2} \\ 1 \\ -\frac{L^e}{k^2} \end{Bmatrix} b_1^e + \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{L^e}{k^2} \\ -1 \\ \frac{L^e}{k^2} \end{Bmatrix} b_2^e,
\end{aligned} \tag{E.25}$$

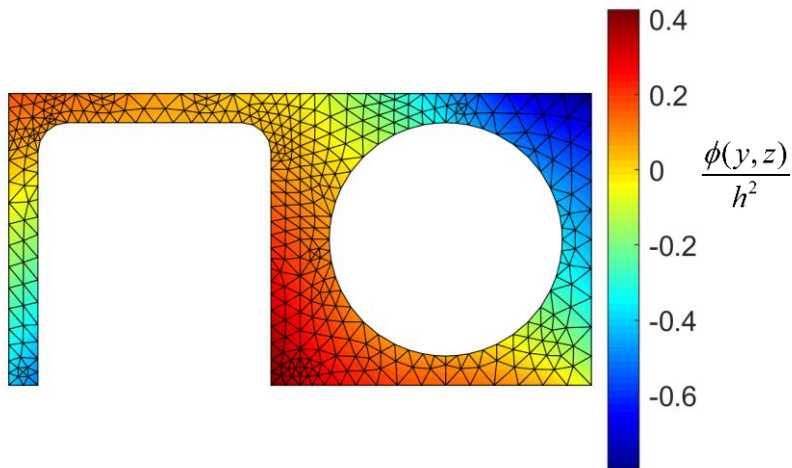
ja elementin kuormitusvektoriksi kaavalla (E.20) tulos

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^e &= \frac{1}{2+k \operatorname{sh} - 2 \operatorname{ch}} \left\{ \begin{Bmatrix} \left( \frac{k^2-4}{2k^2} + \frac{k^2-3}{3k} \operatorname{sh} - \frac{k^2-4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( \frac{k^2-12}{6k^2} - \frac{3}{2k} \operatorname{sh} + \frac{k^2+6}{3k^2} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \\ \left( \frac{k^2+4}{2k^2} + \frac{k^2+6}{6k} \operatorname{sh} - \frac{k^2+4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{2k} \operatorname{sh} - \frac{1}{6} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \end{Bmatrix} m_{x1}^e + \begin{Bmatrix} \left( \frac{k^2+4}{2k^2} + \frac{k^2+6}{6k} \operatorname{sh} - \frac{k^2+4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2k} \operatorname{sh} + \frac{1}{6} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \\ \left( \frac{k^2-4}{2k^2} + \frac{k^2-3}{3k} \operatorname{sh} - \frac{k^2-4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ - \left( \frac{k^2-12}{6k^2} - \frac{3}{2k} \operatorname{sh} + \frac{k^2+6}{3k^2} \operatorname{ch} \right) L^{e2} \end{Bmatrix} m_{x2}^e \right. \\
&\quad \left. + \begin{Bmatrix} 1 + \frac{k}{2} \operatorname{sh} - \operatorname{ch} \\ \left( \frac{k^2-4}{2k^2} - \frac{2}{k} \operatorname{sh} + \frac{k^2+4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \\ 1 + \frac{k}{2} \operatorname{sh} - \operatorname{ch} \\ - \left( \frac{k^2-4}{2k^2} - \frac{2}{k} \operatorname{sh} + \frac{k^2+4}{2k^2} \operatorname{ch} \right) L^e \end{Bmatrix} (b_2^e - b_1^e) \right].
\end{aligned} \tag{E.26}$$

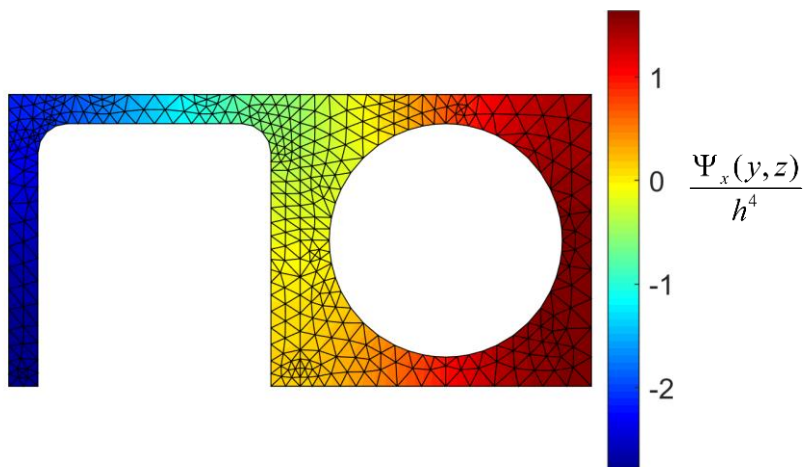
F Esimerkkitehtävän poikkileikkauksen käyritysmisfunktiot



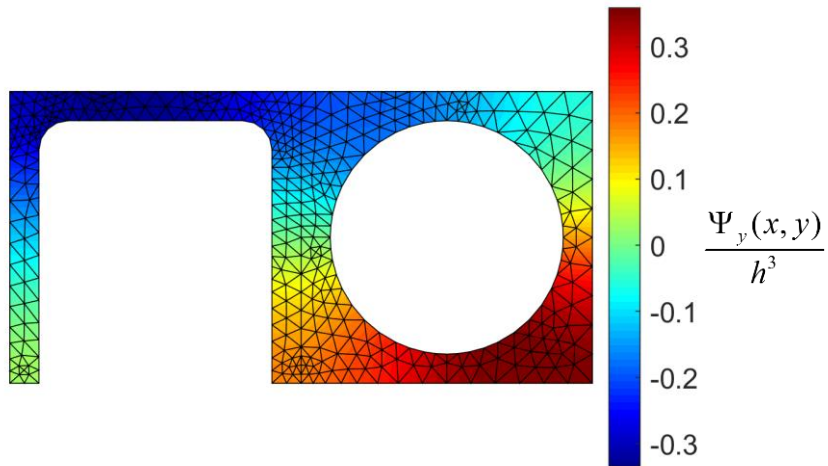
Kuva F.1. Käyritysmisfunktion  $\Phi(y, z)$  jakauma



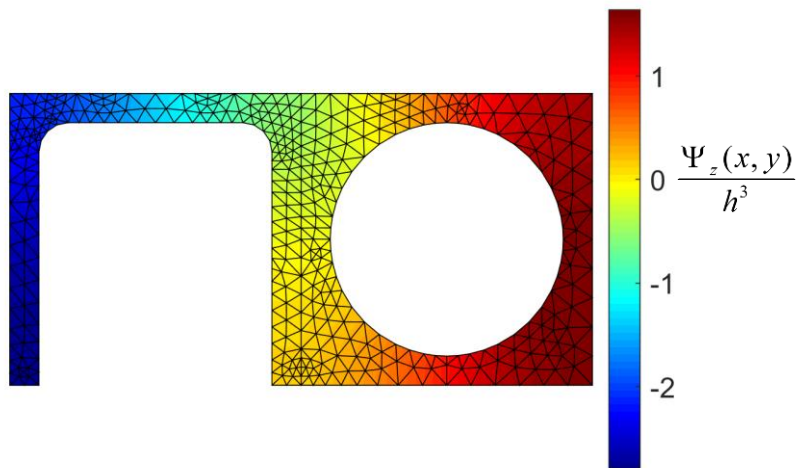
Kuva F.2. Käyritysmisfunktion  $\phi(y, z)$  jakauma



Kuva F.3. Käyritysmisfunktion  $\Psi_x(y, z)$  jakauma



Kuva F.4. Käyritysmisfunktion  $\Psi_y(y, z)$  jakauma



Kuva F.5. Käyritysmisfunktion  $\Psi_z(y, z)$  jakauma