

Tasorakenteiden ilmaääneneristävyyden arvioinnista

Jukka Aalto

Tiivistelmä Artikkelissa tarkastellaan rakenteiden ilmaääneneristävyyden laskennalliseen määrittämiseen liittyviä kysymyksiä rakennusinsinöörin näkökulmasta. Erityisesti tarkastellaan laattoja ja niistä koostuvia kerroksellisia tasorakenteita. Johdetaan esiteltyjen yhtälöiden analyyttisiä ratkaisuja ja demonstroidaan niitä käyttäen ääneneristävyyden laskennallista määrittämistä.

Avainsanat: ilmaääni, tasoaalto, ääneneristävyys, äänenläpäisevyyskerroin, ääneneristysluku, laatta, aaltoimpedanssi

Vastaanotettu: 3.10.2019. *Hyväksytty:* 6.2.2020. *Julkaistu verkossa:* 30.3.2020.

emeritusprofessori Tapio Salmen muistolle

Johdanto

Tässä artikkelissa esitellään, kuinka rakenteiden ääneneristävyyttä voidaan arvioida laskennallisesti. Esitetyt yhtälöt ja analyyttiset ratkaisut eivät ole uusia, vaan ne löytyvät alan kirjallisuudesta, esimerkiksi lähteistä [1], [2], [3] ja [4]. Niiden johtamista ei kuitenkaan aina ole esitetty ja lähestymistapa voi olla rakennusinsinöörille vieras. Tässä artikkelissa esitettävät yhtälöt ja niiden ratkaisut on pyritty johtamaan mahdollisimman selkeästi ja johdonmukaisesti käyttäen rakenteiden mekaniikasta tuttuja käsitteitä. Tarkastelemissa käytetään sekä reaalisia että kompleksisia suureita. Esityksen selkeyttämiseksi nämä eritellään toisistaan käyttämällä reaalisille suureille kursivointia. Imaginaariyksikölle käytetään symbolia j . Vektoreille ja matriiseille käytetään tavanomaista lihavoitinta.

Akustisen aaltoliikkeen yhtälöitä

Akustinen tasoaalto

Akustiselle aaltoliikkeelle nesteessä on voimassa liikeyhtälö

$$\nabla p = -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \quad (1)$$

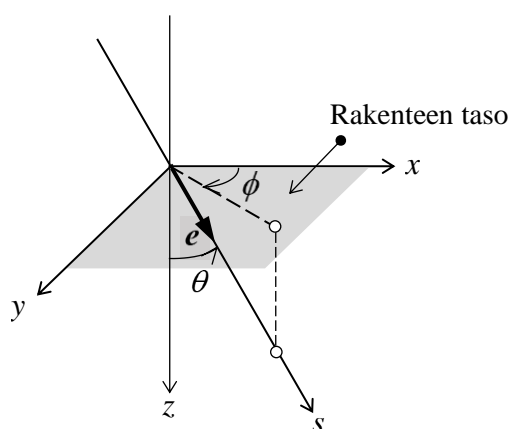
ja aaltoyhtälö

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (2)$$

missä $p(x, y, z, t)$ on akustinen paine, $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ partikkelinopeus, ρ nesteen tiheys ja c äänen nopeus nesteessä. Nimitystä neste (fluid) käytetään tässä sekä nesteelle (liquid) että kaasulle (gas). Tarkastellaan tasoaaltoa, joka etenee suuntaan, jonka määrittelee yksikkövektori

$$\mathbf{e} = \cos \phi \sin \theta \mathbf{i} + \sin \phi \sin \theta \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k} \quad (3)$$

ja koordinaatti s (kuva 1). Kulmia ϕ ja θ kutsutaan suuntakulmiksi.



Kuva 1. Suuntakulmat ϕ ja θ

Nyt $p = p(s, t)$ ja $\mathbf{v}(s, t) = v_s(s, t)\mathbf{e}$, jolloin liikeyhtälö (1) ja aaltoyhtälö (2) saavat muodot

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}, \quad (4)$$

ja

$$\frac{\partial^2 p}{\partial s^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Akustisissa tarkasteluissa osoittautuu tarkoituksenmukaiseksi käyttää fysikaalisten suureiden p , \mathbf{v} ja v_s sijasta kompleksisia suureita \hat{p} , \mathbf{v} ja v_s , koska niiden avulla monet tarkastelut yksinkertaistuvat huomattavasti. Helpon nähdään sijoittamalla, että kompleksinen paine

$$p(s, t) = \hat{p} e^{j\omega(t - \frac{s}{c})}, \quad (6)$$

missä \hat{p} on kompleksinen amplitudi, toteuttaa aaltoyhtälön (5) ja on siis sen kompleksimuotoinen ratkaisu. On ilmeistä, että funktion (6) reaali- ja imaginaariosat erikseen toteuttavat yhtälön (5) ja ovat molemmat sen fysikaalisia ratkaisuja. Ottamalla amplitudille \hat{p} esitys

$$\hat{p} = \hat{p} e^{j\varphi}, \quad (8)$$

missä

$$\hat{p} = |\hat{p}|, \quad \varphi = \arg(\hat{p}), \quad (9)$$

ovat reaalin amplitudi ja vakio kulma, ja sijoittamalla se lausekkeeseen (6) saadaan kompleksinen paine muotoon

$$p(s, t) = \hat{p} e^{j(\omega t - \omega \frac{s}{c} + \varphi)}. \quad (10)$$

Ottamalla lausekkeen (10) reaaliosa, saadaan fysikaaliselle paineelle lauseke

$$p(s, t) \equiv \text{Re}[p(s, t)] = \hat{p} \cos(\omega t - \omega \frac{s}{c} + \varphi). \quad (11)$$

Sijoituksella voidaan tarkistaa, että se toteuttaa aaltoyhtälön (5). Ottamalla vastaavasti lausekkeen (10) imaginaariosa, saataisiin fysikaaliselle paineelle sinimuotoinen lauseke, joka on myös aaltoyhtälön ratkaisu. Tässä työssä fysikaalisina suureina pidetään vastaavien kompleksisuureiden reaaliosia. Liikkeyhtälöstä (4) seuraa

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \frac{j\omega}{\rho c} \hat{p} e^{j\omega(t - \frac{s}{c})} \quad (12)$$

Yhtälön (12) toteuttaa nopeus

$$v_s = \frac{\hat{p}}{\rho c} e^{j\omega(t - \frac{s}{c})}. \quad (13)$$

Kompleksinen nopeus v_s saadaan siis muotoon

$$v_s(s, t) = \hat{v}_s e^{j\omega(t - \frac{s}{c})}, \quad (14)$$

missä sen kompleksinen amplitudi on

$$\hat{v}_s = \frac{\hat{p}}{\rho c}. \quad (15)$$

On siis huomattavaa, että tasoallon nopeuden s -komponentin ja paineen kompleksisilla amplitudeilla on yhteys (15). Kompleksinen paine (6) voidaan esittää myös muodossa

$$p(s, t) = \hat{p} e^{j(\omega t - ks)}, \quad (16)$$

missä

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (17)$$

on aaltoluku. Aaltoluvun ja aallonpituuden λ välillä on yhteys $k = 2\pi / \lambda$, joten aaltoluku on kääntäen verrannollinen aallonpituuteen. Koordinaatille s saadaan

$$s = \mathbf{e} \cdot (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = x \cos \phi \sin \theta + y \sin \phi \sin \theta + z \cos \theta. \quad (18)$$

Sijoittamalla tämä lausekkeeseen (16) saadaan suuntaan \mathbf{e} etenevän tasoallon kompleksiselle paineelle lauseke

$$p(x, y, z, t) = \hat{p} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (19)$$

missä kertoimia

$$k_x = k \cos \phi \sin \theta, \quad k_y = k \sin \phi \sin \theta, \quad k_z = k \cos \theta \quad (20)$$

kutsutaan aaltoluvuiksi x -, y - ja z -suunnissa. Niitä vastaavat aallonpituudet x -, y - ja z -suunnissa ovat $\lambda_x = 2\pi / k_x$, $\lambda_y = 2\pi / k_y$ ja $\lambda_z = 2\pi / k_z$.

Laatta, jonka molemmin puolin on nestettä

Tarkastellaan ääretöntä laattaa, jonka molemmilla puolilla on nestettä. Laatta on (x, y) -tason suuntainen ja z -akseli suuntautuu alaspäin. Laatta on siis vaakatasossa ja sen negatiivisen ja positiivisen z -akselin puoleisia avaruuden osia kutsutaan tässä ylä- ja alapuoliksi ja niihin viittaamaan käytetään alaindeksejä $-$ ja $+$. Laatan ylä- ja alapinnan z -koordinaatteja merkitään symboleilla z_- ja z_+ . Jos laatan ylä- ja alapuolella on eri nestettä, käytetään niiden ominaisuuksille alaindeksejä $-$ ja $+$. Koordinaatiston (x, y, z) origoa ei aseteta tässä tarkastelussa laatan keskitasoon, kuten laattojen käsittelyssä tavallisesti tehdään.

Laattaa kohtaava tasoaalto

Tarkastellaan ääretöntä laattaa, jota kohtaa sen yläpuoleisesta puoliavaruudesta tasoaalto, jonka suuntakulmat ovat ϕ ja θ . Tämän tuloaallon (I , input wave) kompleksiselle paineelle otetaan esitys

$$p_I(x, y, z, t) = \hat{p}_I e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad (21)$$

missä amplitudi \hat{p}_I on tunnettu kompleksinen vakio. Tasoallon kohdatessa laatan, tuloaallon paine (21) ei sellaisenaan kuvaa tilannetta, vaan tarvitaan toinen, heijastunut aalto (R , reflected wave), jonka kompleksiselle paineelle otetaan esitys

$$p_R(x, y, z, t) = \hat{p}_R e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_{Rz} z)}, \quad (22)$$

jossa aaltoluvut k_x ja k_y ovat samat, mutta aaltoluku k_{Rz} poikkeaa tuloaallon aaltoluvusta k_z . Soveltamalla kaavoja (20a) ja (20b) tuloaallolle ja heijastuneelle aallolle saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} k_x &= k \cos \phi \sin \theta = k \cos \phi_R \sin \theta_R, \\ k_y &= k \sin \phi \sin \theta = k \sin \phi_R \sin \theta_R, \end{aligned} \quad (23)$$

joista seuraa heijastuneen aallon suuntakulmille

$$\begin{aligned} \phi_R &= \phi, \\ (\theta_R = \theta) \text{ ja } \theta_R &= \pi - \theta. \end{aligned} \quad (24)$$

Soveltamalla vielä kaavaa (20c) saadaan

$$k_{zR} = k \cos \theta_R = -k \cos \theta = -k_z. \quad (25)$$

Heijastuneen aallon kompleksisen paineen esitys on siis

$$p_R(x, y, z, t) = \hat{p}_R e^{j(\omega t - k_x x - k_y y + k_z z)}. \quad (26)$$

Näin kokonaispaineelle laatan yläpuolella saadaan

$$p_-(x, y, z, t) = p_I(x, y, z, t) + p_R(x, y, z, t) = (\hat{p}_I e^{-jk_z z} + \hat{p}_R e^{jk_z z}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \quad (27)$$

Tässä kohdassa on tarkoituksenmukaista valita koordinaatiston origo laatan yläpinnalla, jolloin $z_- = 0$. Paine (27) laatan yläpinnalla $z = 0$ on siten

$$p_-(x, y, 0, t) = (\hat{p}_I + \hat{p}_R) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \quad (28)$$

Se toimii laatalle kuormituksena, joten sen vaikutuksesta syntyvälle kompleksiselle taipumanopeudelle on luontevaa ottaa vastaava esitys

$$\dot{w}(x, y, t) = \hat{w} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (29)$$

jonka aaltoluvut k_x ja k_y ovat samat. Tämä merkitsee sitä, että paineen ja taipumanopeuden aallonpituudet x - ja y -suunnissa λ_x ja λ_y ovat samat ja aallot siis yhtyvät. Laatan yläpinnalla $z=0$ on voimassa reunaehto, joka saadaan soveltamalla kolmatta liikeyhtälöä (1) laatan pinnalla ja ottamalla huomioon, että $v_z(x, y, 0, t) = \dot{w}(x, y, t)$, missä \dot{w} on laatan taipumanopeus. Saadaan yhtälö

$$\frac{\partial p_-}{\partial z}(x, y, 0, t) = -\rho_- \frac{\partial \dot{w}}{\partial t}(x, y, t), \quad (30)$$

missä ρ_- on laatan yläpuoleisen nesteen tiheys ja $\dot{w}(x, y, t)$ on laatan kompleksinen taipumanopeus. Sijoittamalla lausekkeet (27) ja (29) reunaehtoyhtälöön (30) saadaan

$$jk_z(-\hat{p}_I + \hat{p}_R)e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} = -j\omega\rho_- \hat{w}e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (31)$$

ja soveltamalla laatan yläpuolella yhteyttä (20c) paine- ja taipuma-amplitudeille yhteys

$$\hat{p}_R = \hat{p}_I - \frac{\rho_- c_-}{\cos \theta} \hat{w}. \quad (32)$$

Laatan synnyttämä tasoaalto

Tarkastellaan harmonisesti värähtelevää ääretöntä laatta, jonka taipumanopeus on muotoa (29). Sen alapuoleiseen puoliavaruuteen syntyvän aallon kompleksiselle paineelle otetaan vastaavin perustein kuin kohdassa 2.3 esitys

$$p_+(x, y, z, t) = \hat{p}_+ e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}. \quad (33)$$

Reunaehtoyhtälö laatan alapinnalla $z = z_+$ on

$$\frac{\partial p_+}{\partial z}(x, y, z_+, t) = -\rho_+ \frac{\partial \dot{w}}{\partial t}(x, y, t), \quad (34)$$

missä ρ_+ on laatan alapuoleisen (z -akselin positiivisen suunnan puoleisen) nesteen tiheys. Sijoittamalla tähän lausekkeet (29) ja (33) saadaan yhtälö

$$-jk_z \hat{p}_+ e^{-jk_z z_+} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} = -j\omega\rho_+ \hat{w}e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (35)$$

josta seuraa soveltamalla vielä laatan alapuolella yhteyttä (20c) laatan synnyttämän aallon kompleksisen paineen amplitudille tulos

$$\hat{p}_+ = e^{jk_z z_+} \frac{\rho_+ c_+}{\cos \theta_+} \hat{w}. \quad (36)$$

Kahden laatan välinen tasoaalto

Tarkastellaan kahta laattaa 1 ja 2 sekä niiden välissä olevaa nestettä. Laattojen taipumanopeuksille otetaan esitykset

$$\dot{w}_1(x, y, t) = \hat{w}_1 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad \dot{w}_2(x, y, t) = \hat{w}_2 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \quad (37)$$

Laattojen väliseen nesteeseen syntyy z -akselin positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan etenevät aallot A ja B , joiden paineille otetaan esitykset

$$p_A(x, y, z, t) = \hat{p}_A e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)}, \quad p_B(x, y, z, t) = \hat{p}_B e^{j(\omega t - k_x x - k_y y + k_z z)} \quad (38)$$

ja kokonaispaine on

$$p = p_A + p_B = (\hat{p}_A e^{-jk_z z} + \hat{p}_B e^{jk_z z}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \quad (39)$$

Reunaehdot laattojen nesteeseen rajoittuvilla pinoilla $z = z_{1+}$ ja $z = z_{2-}$ ovat

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z_{1+}, t) = -\rho \frac{\partial \hat{w}_1}{\partial t}(x, y, t), \quad \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z_{2-}, t) = -\rho \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial t}(x, y, t). \quad (40)$$

Niistä seuraa

$$\begin{aligned} -jk_z(\hat{p}_A e^{-jk_z z_{1+}} - \hat{p}_B e^{jk_z z_{1+}}) &= -\rho j \omega \hat{w}_1, \\ -jk_z(\hat{p}_A e^{-jk_z z_{2-}} - \hat{p}_B e^{jk_z z_{2-}}) &= -\rho j \omega \hat{w}_2 \end{aligned} \quad (41)$$

ja edelleen yhtälöt

$$\begin{aligned} e^{-jk_z z_{1+}} \hat{p}_A - e^{jk_z z_{1+}} \hat{p}_B &= \frac{\rho c}{\cos \theta} \hat{w}_1, \\ e^{-jk_z z_{2-}} \hat{p}_A - e^{jk_z z_{2-}} \hat{p}_B &= \frac{\rho c}{\cos \theta} \hat{w}_2. \end{aligned} \quad (42)$$

Ratkaisemalla näistä yhtälöistä paineamplitudit, saadaan

$$\begin{aligned} \hat{p}_A &= \frac{j}{2 \sin k_z d} \frac{\rho c}{\cos \theta} (-e^{jk_z z_{2-}} \hat{w}_1 + e^{jk_z z_{1+}} \hat{w}_2), \\ \hat{p}_B &= \frac{j}{2 \sin k_z d} \frac{\rho c}{\cos \theta} (-e^{-jk_z z_{2-}} \hat{w}_1 + e^{-jk_z z_{1+}} \hat{w}_2), \end{aligned} \quad (43)$$

missä $d = z_{2-} - z_{1+}$ on laattojen välisen nestekerroksen paksuus.

Ääneneristävyys

Akustinen intensiteetti ja äänen teho

Aluksi tarkastellaan, kuinka rakenteen ääneneristävyys voidaan määrittää, kun siihen kohdistuu tasoaalto, jonka taajuus on f ja suuntakulmat ϕ ja θ . Tarkastelussa hyödyllinen käsite on akustinen intensiteetti I , jota tarkastellaan tässä lähteen [3] hengessä. Se määritellään suureena, jonka avulla äänen tehon aikakeskiarvo pinnalla A saadaan kaavalla

$$\langle P \rangle = \int_A I dA. \quad (44)$$

Äänen teho pinnalla A on

$$P = \int_A p v_n dA, \quad (45)$$

missä p on fysikaalinen paine ja v_n on nopeuden normaalikomponentti. Sen aikakeskiarvolle saadaan

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \int_A \frac{1}{T} \int_0^T p v_n dt dA, \quad (46)$$

missä $T = 1/f = 2\pi/\omega$ on jaksonaika. Kaavoista (44) ja (46) seuraa akustiselle intensiteetille lauseke

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p v_n dt. \quad (47)$$

Jos kysymyksessä on tasoaalto, jonka suunnan määrittelee yksikkövektori \mathbf{e} ja joka kohdtaa (x, y) -tason suuntaisen tasopinnan, se saadaan muotoon

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T p v_z dt = \frac{1}{T} \int_0^T p v_s dt \cos \theta. \quad (48)$$

Fysikaaliselle paineelle ja s -nopeudelle saadaan

$$p = \text{Re}(p) = \hat{p} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} s + \varphi),$$

$$v_s = \text{Re}(v_s) = \hat{v}_s \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} s + \varphi) = \frac{\hat{p}}{\rho c} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} s + \varphi). \quad (49)$$

Näin akustiselle intensiteetille saadaan

$$I = \frac{1}{T} \frac{\hat{p}^2}{\rho c} \int_0^T \cos^2(\omega t - \frac{\omega}{c} s + \varphi) dt \cos \theta = \frac{\hat{p}^2}{2\rho c} \cos \theta, \quad (50)$$

joka on vakio. Pinnan A läpi virtaavan äänen tehon aikakeskiarvolle saadaan tässä tapauksessa

$$\langle P \rangle = IA. \quad (51)$$

Rakenteen äänenläpäisevyyskerroin ja ääneneristävyys

Rakenteen äänenläpäisevyyskerroin vinosti kohtaavalle ääniaallolle määritellään kaavalla

$$\tau_{\angle} = \frac{\langle P_T \rangle}{\langle P_I \rangle}. \quad (52)$$

Sille käytetään alaindeksiä \angle tähdentämään kohtaamisen vinoutta ($\theta \geq 0$). Jatkossa osoittautuu, että yleisessä tapauksessa τ_{\angle} riippuu molemmista suuntakulmista ϕ ja θ . Läpäisseen- ja tuloaallon tehojen aikakeskiarvot ovat

$$\langle P_T \rangle = I_T A, \quad \langle P_I \rangle = I_I A, \quad (53)$$

missä A on rakenteen ääntä läpäisevä pinta, ja niiden akustiset intensiteetit ovat

$$I_T = \frac{\hat{p}_T^2}{2\rho_+ c_+} \cos \theta_+, \quad I_I = \frac{\hat{p}_I^2}{2\rho_- c_-} \cos \theta_-, \quad (54)$$

missä alaindeksit $-$ ja $+$ viittaavat rakenteen ylä- ja alapuoleen. Rakenteen äänenläpäisevyyskerroin saadaan nyt

$$\tau_{\angle} = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\rho_- c_- \cos \theta_+ \hat{p}_T^2}{\rho_+ c_+ \cos \theta_- \hat{p}_I^2} = \frac{\rho_- c_- \cos \theta_+}{\rho_+ c_+ \cos \theta_-} \left| \frac{\hat{p}_T}{\hat{p}_I} \right|^2. \quad (55)$$

Jotta kaavaa (55) voidaan käyttää, täytyy läpäisseen aallon suuntakulma θ_+ tuntea. Koska aaltoluvut k_x ja k_y rakenteen ylä- ja alapuoleisissa nesteissä ovat samat, saadaan kaavojen (20a) ja (20b) perusteella yhtälöt

$$k_- \cos \phi_- \sin \theta_- = k_+ \cos \phi_+ \sin \theta_+,$$

$$k_- \sin \phi_- \sin \theta_- = k_+ \sin \phi_+ \sin \theta_+, \quad (56)$$

joista seuraa $\phi_+ = \phi_-$ ja

$$\theta_+ = \arcsin\left(\frac{k_-}{k_+} \sin \theta_-\right) = \arcsin\left(\frac{c_+}{c_-} \sin \theta_-\right). \quad (57)$$

Tavallisesti rakenteen molemmin puolin on sama neste (ilma), jolloin kaava (55) yksinkertaistuu muotoon

$$\tau_{\perp} = \left| \frac{\hat{p}_T}{\hat{p}_I} \right|^2. \quad (58)$$

Rakenteen ääneneristävyys [dB] vinosti kohtaavalle ääniaallolle määritellään äänenläpäisevyysskerroin avulla kaavalla

$$R_{\perp} = 10 \lg \frac{1}{\tau_{\perp}}. \quad (59)$$

Rakenteen ääneneristävyys diffuusille kentälle

Todellisuudessa ääni ei koskaan kohtaa rakennetta vain yhdestä suunnasta. Siksi rakenteen äänenläpäisevyyttä tutkittaessa otaksutaan, että siihen kohdistuu diffuusi kenttä, jossa eri suunnista rakenteeseen kohdistuvilla tasoaalloilla on sama todennäköisyys. Tarkasteluun ei kuitenkaan sisällytetä aaltoja, joiden suuntakulma θ ylittää tietyn kokemusperäisen rajakulman $\bar{\theta}$, jolle käytetään [4] arvoa 78° . Rakenteen pinnan loivasti kohtaavat aallot näet heijastuvat eivätkä läpäise rakennetta. Rakenteen äänenläpäisevyysskerroin diffuusille kentälle määritellään kaavalla

$$\tau = \frac{\int_S I_T(\phi, \theta) dS}{\int_S I_I(\theta) dS}, \quad (60)$$

missä integrointi tapahtuu tarkasteltavaa pistettä ympäröivän r_0 -säteisen pallokalotin S yli, jonka keskuskulma on $\bar{\theta}$. Pinta-alkiolle saadaan

$$dS = r_0 \sin \theta d\phi \cdot r_0 d\theta = r_0^2 \sin \theta d\phi d\theta. \quad (61)$$

Nyt saadaan

$$\int_S I_I dS = \int_S \frac{\hat{p}_I^2}{\rho_- c_-} \cos \theta dS = \frac{\hat{p}_I^2}{\rho_- c_-} r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta, \quad (62)$$

$$\int_S I_T dS = \int_S \tau_{\perp}(\phi, \theta) I_I dS = \frac{\hat{p}_I^2}{\rho_+ c_+} r_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \tau_{\perp}(\phi, \theta) \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta,$$

jolloin äänenläpäisevyysskerroin τ saadaan tulos

$$\tau = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \tau_{\perp}(\phi, \theta) \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\bar{\theta}} \cos \theta \sin \theta d\phi d\theta} = \frac{1}{\pi \sin^2 \bar{\theta}} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\bar{\theta}} \tau_{\perp}(\phi, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \right] d\phi. \quad (63)$$

Symmetrian vuoksi voidaan se vielä kirjoittaa muotoon

$$\tau = \frac{2}{\pi \sin^2 \bar{\theta}} \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\bar{\theta}} \tau_{\perp}(\phi, \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta \right] d\phi. \quad (64)$$

Äänenläpäisevyyskertoimen lauseke $\tau_{\angle}(\phi, \theta)$ on yleensä niin monimutkainen, että kaavan (64) integroinnit muuttujien ϕ ja θ yli joudutaan suorittamaan numeerisesti soveltamalla puolisuunnikkasääntöä. Monissa tärkeissä käytännön tapauksissa tasoallan äänenläpäisevyyskerroin riippuu vain suuntakulmasta θ . Tällöin äänenläpäisevyyskerroimen τ lauseke (64) yksinkertaistuu muotoon

$$\tau = \frac{2}{\sin^2 \bar{\theta}} \int_0^{\bar{\theta}} \tau_{\angle}(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta. \quad (65)$$

Tässä tapauksessa numeerinen integrointi tapahtuu vain muuttujan θ yli.

Rakenteen ääneneristävyys R [dB] diffuusille kentälle saadaan äänenläpäisevyyskerroimen avulla τ kaavalla

$$R = 10 \lg \frac{1}{\tau}. \quad (66)$$

Se riippuu taajuudesta ja esitetään usein graafisesti taajuuden logaritmin funktiona.

Huomautus: Lähteessä [1], [3], ja [4] on esitetty äänenläpäisevyyskerroimen τ kaava (65) ja lähteessä [3] sen johto. Niissä on siis rajoitettu tapaukseen, jossa τ_{\angle} riippuu vain suuntakulmasta θ . Yleisessä tapauksessa on käytettävä kaavaa (64).

Laskennallinen ääneneristävyyskäyrä

Kokeellisesti ääneneristävyys mitataan [5] 1/3-oktaavin levyisillä kohinaäänikaistoilla kuudellatoista eri taajuudella välillä 100...3150 Hz. Mittaustulos esitetään käyränä (murtoviivana) koordinaatistossa, jonka abskissa on taajuuden logaritmi ja ordinaatta ääneneristävyys. Määrittäessä ääneneristävyyttä laskennallisesti voidaan konstruoida vastaavanlainen käyrä. Tarkasteltava taajuusalue jaetaan kuuteentoista 1/3-oktaavikaistaan $i = 1, \dots, 16$, joiden ala- ja ylärajat f_i^{ala} ja $f_i^{ylä}$ sekä keskipisteet \bar{f}_i on esitetty taulukossa 1. Ääneneristävyuden keskimääräinen suuruus kaistassa i määritellään lausekkeena

$$\bar{R}_i = \frac{1}{f_i^{ylä} - f_i^{ala}} \int_{f_i^{ala}}^{f_i^{ylä}} R(f) df, \quad (67)$$

missä $R(f)$ on ääneneristävyys taajuuden f funktiona. Integrointi kaavassa (67) suoritetaan numeerisesti käyttäen puolisuunnikkasääntöä. Kun kaistojen keskimääräiset ääneneristävyudet \bar{R}_i on määritetty, esitetään tulos murtoviivana, jonka kulmapisteiden i koordinaatit ovat $x_i = \lg \bar{f}_i$ ja $y_i = \bar{R}_i$. Sitä kutsutaan tässä laskennalliseksi ääneneristävyyskäyräksi.

Ilmaääneneristysluku

Usein rakenteen ilmaääneneristävyys halutaan esittää yhdellä luvulla. Tällainen on ilmaääneneristysluku R_w [dB], joka määritetään seuraavasti [5]. Ääneneristävyyskäyrän koordinaatistoon asetetaan kolmesta suorasta osasta muodostuva vertailukäyrä (murtoviiva), jonka ordinaattaa kahdeksannen oktaavikaistan keskuksen $\bar{f}_8 = 500$ Hz kohdalla merkitään symbolilla y_8 ja jonka arvot y_i^{vert} kaistojen keskusten \bar{f}_i kohdilla on esitetty (y_8 :n avulla) taulukossa 1. Valitaan aluksi y_8 :n arvoksi suurin kokonaisluku, jolla ääneneris-

tävyyskäyrän kulmapisteiden poikkeamien summa vertailukäyrän alapuolella on enintään 32 dB. Jos samanaikaisesti pisteiden suurin poikkeama vertailukäyrästä on enintään 8 dB, ilmääneneristysluku on $R_w = y_8$. Jos suurin poikkeama ylittää 8 dB, valitaan y_8 :n uudeksi arvoksi suurin kokonaisluku, jolla samanaikaisesti ilmääneneristävyyssäyrän kulmapisteiden poikkeamien summa vertailukäyrän alapuolella on enintään 24 dB ja suurin poikkeama enintään 12 dB. Tällöin ilmääneneristysluku on $R_w = y_8$.

Taulukko 1. 1/3-oktaavikaistojen ala- ja ylärajat, keskipisteet sekä vertailukäyrän ordinaatat [5].

i	f_i^{ala}	$f_i^{ylä}$	\bar{f}_i	y_i^{vert}
1	89.1	112	100	$y_8 - 19$
2	112	141	125	$y_8 - 16$
3	141	178	160	$y_8 - 13$
4	178	224	200	$y_8 - 10$
5	224	282	250	$y_8 - 7$
6	282	355	315	$y_8 - 4$
7	355	447	400	$y_8 - 1$
8	447	562	500	y_8
9	562	708	630	$y_8 + 1$
10	708	891	800	$y_8 + 2$
11	891	1122	1000	$y_8 + 3$
12	1122	1413	1250	$y_8 + 4$
13	1413	1778	1600	$y_8 + 4$
14	1778	2239	2000	$y_8 + 4$
15	2239	2818	2500	$y_8 + 4$
16	2818	3548	3150	$y_8 + 4$

Laatan aaltoimpedanssi

Laatan aaltoimpedanssin määrittely

Hyödyllinen käsite, jota voidaan käyttää laatan ja laatoista koostuvan tasorakenteen ääneneristävyyden määrittämisen yhteydessä on laatan aaltoimpedanssi (wave impedance) [2], jolle käytetään myös nimitystä separaatioimpedanssi (separation impedance) [1]. Esitetään laataan kohdistuva harmoninen kompleksimuotoinen jakautunut kuormitus, sen synnyttämä taipuma ja taipumanopeus muodoissa

$$q(x, y, t) = \hat{q} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (68)$$

$$w(x, y, t) = \hat{w} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \quad (69)$$

ja

$$\dot{w}(x, y, t) = \hat{\dot{w}} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \quad (70)$$

Kompleksiselle taipumanopeudelle saadaan

$$\dot{w}(x, y, t) \equiv \frac{\partial w}{\partial t} = j\omega \hat{w} e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (71)$$

joten sen ja taipuman kompleksilla amplitudeilla on yhteys

$$\hat{\dot{w}} = j\omega \hat{w}. \quad (72)$$

Laatan aaltoimpedanssi määritellään nyt laatan kuormituksen ja sen aiheuttaman taipumanopeuden kompleksisten amplitudien suhteena

$$Z^* = \frac{\hat{q}}{\hat{w}}. \quad (73)$$

Kun laatan aaltoimpedanssi tunnetaan, voidaan laattaan kohdistuvan kuorman ja siitä aiheutuvan taipumanopeuden kompleksisten amplitudien välinen yhteys esittää muodossa

$$Z^* \hat{w} = \hat{q}. \quad (74)$$

Seuraavassa johdetaan aaltoimpedanssin lauseke ortotrooppiselle Kirchhoff-laatalle ja isoprooppiselle Reissner–Mindlin-laatalle.

Kirchhoff-laatan aaltoimpedanssi

Ortotrooppisen Kirchhoff-laatan taipuman $w(x, y, t)$ differentiaaliyhtälö [7] on muotoa

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q = 0, \quad (75)$$

missä $q(x, y, t)$ on laattaan kohdistuva jakautunut kuormitus ja m laatan pintamassa. Kerroin $H = B_1 + 2B_{xy}$ ja sekä B_x , B_y , B_1 ja B_{xy} ovat laatan taivutusjäykkyydet. Kompleksisen taipuman $w(x, y, t)$ ja kuormituksen $q(x, y, t)$ tapauksessa yhtälö (75) esitetään muodossa

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q = 0. \quad (76)$$

Tarkasteluun on samalla sisällytetty kompleksijäykkyydvaimennus, ottamalla käyttöön kompleksiset taivutusjäykkyydet

$$B_x = B_x(1 + j\eta), \quad H = H(1 + j\eta), \quad B_y = B_y(1 + j\eta), \quad (77)$$

missä η on häviöluku. Sijoittamalla taipuman ja kuorman lausekkeet (68) ja (69) yhtälöön (76) saadaan amplitudien \hat{w} ja \hat{q} välille yhtälö

$$(B_x k_x^4 + 2H k_x^2 k_y^2 + B_y k_y^4 - m\omega^2) \hat{w} = \hat{q}. \quad (78)$$

Soveltamalla vielä yhteyttä (72) saadaan amplitudien $\hat{\dot{w}}$ ja \hat{q} välille yhteys

$$j(m\omega - \frac{B_x k_x^4 + 2H k_x^2 k_y^2 + B_y k_y^4}{\omega}) \hat{\dot{w}} = \hat{q}. \quad (79)$$

Vertaamalla yhtälöitä (74) ja (79) saadaan ortotrooppisen Kirchhoff-laatan aaltoimpedanssille tulos

$$Z^* = j(m\omega - \frac{B_x k_x^4 + 2H k_x^2 k_y^2 + B_y k_y^4}{\omega}) \quad (80)$$

Jos kysymyksessä on isotrooppinen laatta,

$$B_x = B_y = H = B \equiv \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (81)$$

ja sen aaltoimpedanssille saadaan

$$Z^* = j[m\omega - \frac{B}{\omega} (\frac{\omega}{c})^4 \sin^4 \theta], \quad (82)$$

missä

$$B = B(1 + j\eta). \quad (83)$$

Reissner–Mindlin-laatan aaltoimpedanssi

Tarkastellaan tässä isotrooppista Reissner–Mindlin-laattaa, johon on sisällytetty rotaatiohitauden vaikutus. Sen taipuman differentiaaliyhtälö on johdettu liitteessä A (kaava (A.16)) ja on muotoa

$$B\nabla^4 w - (J + \frac{mB}{S})\nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{mJ}{S} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \frac{B}{S} \nabla^2 q + \frac{J}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \quad (84)$$

missä B ja S ovat sen taivutus- ja leikkausjäykkyydet sekä J on rotaatiohitaus. Vastava kompleksimuotoinen yhtälö on

$$B\nabla^4 w - (J + \frac{mB}{S})\nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{mJ}{S} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \frac{B}{S} \nabla^2 q + \frac{J}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}, \quad (85)$$

missä kompleksiset jäykkyydet ovat

$$B = B(1 + j\eta), \quad S = S(1 + j\eta). \quad (86)$$

Sijoittamalla taipuman ja kuorman lausekkeet (68) ja (69) yhtälöön (85) saadaan yhtälö

$$\begin{aligned} & [B \frac{\omega^4}{c^4} \sin^4 \theta - (J + \frac{mB}{S}) \frac{\omega^4}{c^2} \sin^2 \theta + \frac{mJ}{S} \omega^4 - m\omega^2] \hat{w} \\ & = (1 + \frac{B}{S} \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{J}{S} \omega^2) \hat{q}, \end{aligned} \quad (87)$$

Soveltamalla vielä yhteyttä (72) saadaan amplitudien \hat{w} ja \hat{q} välille yhteys

$$j\omega \frac{m - B \frac{\omega^2}{c^4} \sin^4 \theta + (J + \frac{mB}{S}) \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{mJ}{S} \omega^2}{1 + \frac{B}{S} \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{J}{S} \omega^2} \hat{w} = \hat{q}. \quad (88)$$

Vertaamalla yhtälöitä (74) ja (88) saadaan isotrooppisen Reissner–Mindlin-laatan aaltoimpedanssille tulos

$$Z^* = j\omega \frac{m - B \frac{\omega^2}{c^4} \sin^4 \theta + (J + \frac{mB}{S}) \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{mJ}{S} \omega^2}{1 + \frac{B}{S} \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{J}{S} \omega^2}. \quad (89)$$

Jos laatta on homogeeninen

$$B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad S = kGh, \quad J = \frac{mh^2}{12}, \quad (90)$$

missä $k = 5/6$ on leikkauskorjauskertoimen. Jos lisäksi vaimennus jätetään huomiotta, jolloin $B = B$ ja $S = S$, aaltoimpedanssin lauseke (89) saa muodon

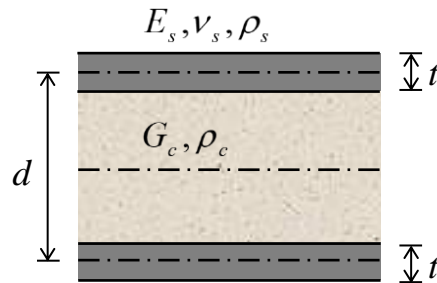
$$Z^* = j\omega \frac{m - B \frac{\omega^2}{c^4} \sin^4 \theta + \left(\frac{mh^2}{12} + \frac{mB}{kGh} \right) \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{m^2 h^2}{12kG} \omega^2}{1 + \frac{B}{kGh} \frac{\omega^2}{c^2} \sin^2 \theta - \frac{mh}{12kG} \omega^2}. \quad (91)$$

Tämä tulos on esitetty lähteen [1] kaavassa (9.90), sillä erolla, että siinä $k = 1$.

Tärkeä käytännön sovellus on sandwich laatta. Esimerkiksi kuvan 2 sandwich laatan, jonka pintakerrokset ovat ohuet ja samanlaiset, taivutusjäykkyys, leikkausjäykkyys, pintamassa ja rotaatiohitaus voidaan arvioida kaavoilla

$$B = \frac{E_s d^2 t}{2(1-\nu_s^2)}, \quad S = G_c d, \quad m = 2\rho_s t + \rho_c (d-t), \quad J = \frac{\rho_s t d^2}{2} + \frac{\rho_c (d-t)^3}{12}, \quad (92)$$

joissa alaindeksit s ja c viittaavat pinta- (surface) ja ydinkerrokseen (core).



Kuva 2. Yksinkertaisen sandwich laatan poikkileikkaus

Yksittäisen laatan ääneneristävyys

Laatan äänenläpäisevyyskerroin

Tarkastellaan laattaa, jonka ylä- ja alapuolella on yleisessä tapauksessa eri nesteet, jotka identifioidaan alaindeksillä $-$ ja $+$. Asetetaan koordinaatiston origo laatan yläpintaan, jolloin $z_- = 0$. Nesteistä laattaa kohdistuva jakautunut kuorma muodostuu sen ylä- ja alapintoihin $z = 0$ ja $z = z_+$ kohdistuvista paineista seuraavasti

$$q(x, y, t) = p_-(x, y, 0, t) - p_+(x, y, z_+, t). \quad (93)$$

Käyttäen kaavoja (28), (33), (32) ja (36) saadaan

$$q(x, y, t) = (\hat{p}_I + \hat{p}_R - \hat{p}_+ e^{-jk_z z_+}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} = \hat{q} e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (94)$$

missä kuorma-amplitudi on

$$\hat{q} = 2\hat{p}_I - \left(\frac{\rho_- c_-}{\cos \theta_-} + \frac{\rho_+ c_+}{\cos \theta_+} \right) \hat{w}. \quad (95)$$

Sijoittamalla tämä yhtälöön (74) saadaan yhtälö

$$\left(Z^* + \frac{\rho_- c_-}{\cos \theta_-} + \frac{\rho_+ c_+}{\cos \theta_+} \right) \hat{w} = 2\hat{p}_I, \quad (96)$$

jonka ratkaisu kompleksiselle taipumanopeuden amplitudille on

$$\hat{w} = \frac{2\hat{p}_I}{Z^* + \frac{\rho_- c_-}{\cos \theta_-} + \frac{\rho_+ c_+}{\cos \theta_+}}. \quad (97)$$

Läpäisseen aallon (T transmitted wave) kompleksinen paine laatan alapinnalla on $p_T(x, y, t) = p_+(x, y, z_+, t)$. Kaavoja (33) ja (36) käyttäen sen amplitudille saadaan

$$\hat{p}_T = \frac{\rho_+ c_+}{\cos \theta_+} \hat{w}. \quad (98)$$

Sijoittamalla siihen taipumanopeuden amplitudi (97) saadaan tulos

$$\hat{p}_T = \frac{\hat{p}_I}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_- c_-}{\rho_+ c_+} \frac{\cos \theta_+}{\cos \theta_-} + Z^* \frac{\cos \theta_+}{2\rho_+ c_+}}. \quad (99)$$

Laatan äänenläpäisevyyskertoimelle vinosti kohtaavalle ääniaallolle saadaan nyt kaavan (55) perusteella

$$\tau_{\angle} = \frac{\rho_- c_-}{\rho_+ c_+} \frac{\cos \theta_+}{\cos \theta_-} \frac{1}{\left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_- c_-}{\rho_+ c_+} \frac{\cos \theta_+}{\cos \theta_-} + Z^* \frac{\cos \theta_+}{2\rho_+ c_+} \right|^2}, \quad (100)$$

missä ρ_- , c_- , ρ_+ ja c_+ ovat laatan ylä- ja alapuoleisen nesteen tiheydet ja äänen nopeudet sekä θ ja θ_+ ovat kohtaavan ja läpäisseen aallon suuntakulmat. Jos laatan molemmilla puolilla on ilmaa, $\rho_- = \rho_+ = \rho$ ja $c_- = c_+ = c$, missä ρ ja c ovat ilman tiheys ja äänen nopeus, äänenläpäisevyyskertoimen lauseke (100) yksinkertaistuu muotoon

$$\tau_{\angle} = \frac{1}{\left| 1 + Z^* \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right|^2}. \quad (101)$$

Lauseketta (101) (tai (100)) käyttäen voidaan määrittää erilaisten laattojen äänenläpäisevyyskerroin τ_{\angle} sijoittamalla siihen kyseisen laatan aaltoimpedanssin lauseke. Edellä todettiin, että yleisessä tapauksessa äänenläpäisevyyskerroin τ_{\angle} riippuu molemmista suuntakulmista ϕ ja θ . Näin esimerkiksi ortotrooppisen Kirchhoff-laatan tapauksessa todella käykin, koska sen aaltoimpedanssin lausekkeessa (80) esiintyvät aaltoluvut k_x ja k_y , jotka riippuvat kaavojen (20a) ja (20b) perusteella kulmasta ϕ . Tässä tapauksessa laatan äänenläpäisevyyskerroin τ diffuusille kentälle lasketaan kaavalla (64) käyttäen numeerista integrointia kahdessa suunnassa. Isotrooppisten Kirchhoff- ja Reissner–Mindlin-laattojen tapauksessa äänenläpäisevyyskerroin τ_{\angle} riippuu vain kulmasta θ ja laatan äänenläpäisevyyskerroin τ voidaan laskea nopeammin kaavalla (65) käyttäen numeerista integrointia yhdessä suunnassa. Laatan ääneneristävyys saadaan lopuksi kaavalla (66).

Isotrooppisen Kirchhoff-laatan äänenläpäisevyyskerroin

Tarkastellaan hieman yksityiskohtaisemmin isotrooppisen Kirchhoff-laatan äänenläpäisevyyskertoimen τ_{\angle} määrittämistä. Sijoittamalla aaltoimpedanssin lauseke (82) kaavaan (101), laatan äänenläpäisevyyskertoimelle lauseke

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{\left| 1 + j \left[m\omega - \frac{B}{\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \right] \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right|^2} . \quad (102)$$

Muokataan lauseketta (102) sijoittamalla siihen kompleksisen taivutusjäykkyyden lauseke (83). Saadaan tulos

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{\left[1 + \eta \frac{B}{\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right]^2 + \left\{ m\omega - \frac{B}{\omega} \left(\frac{\omega}{c} \right)^4 \sin^4 \theta \right\} \frac{\cos \theta}{2\rho c}} , \quad (103)$$

joka on reaali muodossa. Tämä voidaan vielä saattaa muotoon

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{\left(1 + \eta \frac{f^2}{f_c^2} \sin^4 \theta \frac{\pi m f}{\rho c} \cos \theta \right)^2 + \left[\left(1 - \frac{f^2}{f_c^2} \sin^4 \theta \right) \frac{\pi m f}{\rho c} \cos \theta \right]^2} , \quad (104)$$

missä $f = \omega / 2\pi$ on taajuus ja vakiota

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{m}{B}} \quad (105)$$

kutsutaan kriittiseksi taajuudeksi. Tulos (104) hieman eri muodossa on esitetty lähteessä [1] numerolla (9.95). Havaitaan, että taajuudella

$$f = \frac{f_c}{\sin^2 \theta} \quad (106)$$

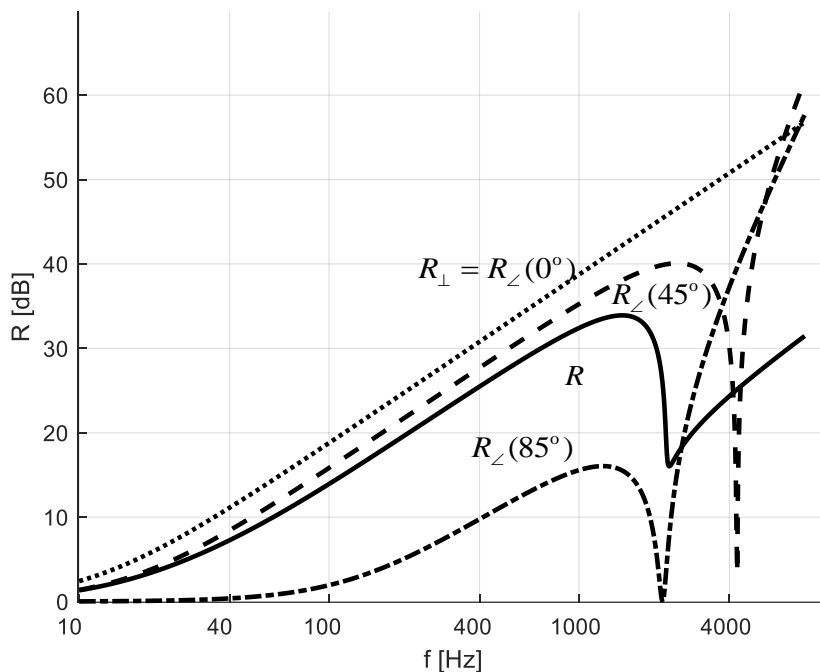
äänenläpäisevyyskerroin on

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{\left(1 + \eta \frac{\pi m f_c}{\rho c} \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right)^2} \quad (107)$$

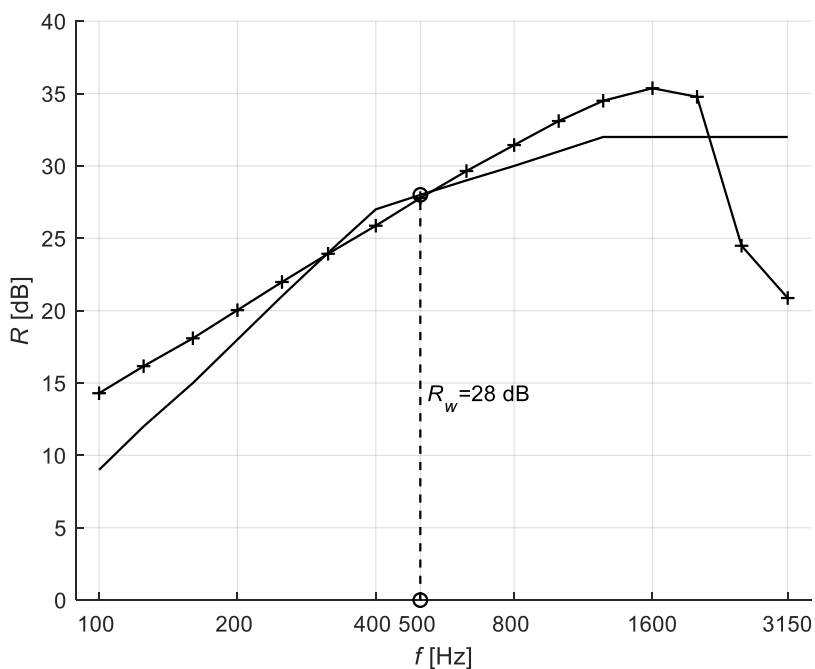
ja vaimentamattomassa tapauksessa $\eta = 0$ se on $\tau_{\perp} = 1$. Tämä merkitsee, että taajuuden lähestyessä arvoa (106) äänenläpäisevyyskerroin lähestyy ykköstä ja ääneneristävyys vastaavasti nolaa. Ilmiötä kutsutaan koinsidenssiksi.

Tarkastellaan esimerkkinä lähteessä [1] tarkasteltua lasilaattaa, jonka paksuus, kimmoduuli, Poissonin luku, häviökerroin ja tiheys ovat $h = 4,76 \cdot 10^{-3}$ m (3/16"), $E = 6,76 \cdot 10^{10}$ N/m², $\nu = 0,33$, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ ja $\rho_p = 2500$ kg/m³. Ilman tiheydelle ja äänen nopeudelle ilmassa käytetään arvoja $\rho = 1,21$ kg/m³ ja $c = 343$ m/s. Taivutus-jäykkyydelle ja kriittiselle taajuudelle saadaan $B = 681,8$ Nm ja $f_c = 2473,7$ Hz. Kuvassa 3 on esitetty kaavoja (104) ja (59) käyttäen laskettu lasilaatan ääneneristävyys R_{\perp} tulokulmilla $\theta = 0^\circ$, $\theta = 45^\circ$, $\theta = 85^\circ$ taajuuden funktiona. Koinsidenssitajuudet (106) tulokulmilla $\theta = 45^\circ$ ja $\theta = 85^\circ$ ovat vastaavasti 4950 Hz ja 2490 Hz. Kaavoja (107) ja (59) käyttäen saadaan laatan tulokulmia $\theta = 45^\circ$ ja $\theta = 85^\circ$ vastaaviksi ääneneristävyyksiksi R_{\perp} koinsidenssitajuudella arvot 2,38 dB ja 0,17 dB, jotka ovat pieniä. Laskettiin myös laatan ääneneristävyys R diffuusille kentälle taajuuden funktiona, soveltamalla kaavaa (65) ja numeerista integrointia. Tulos on piirretty täydellä viivalla kuvaan 3. Lähteen [1] kuvassa 9.19 esitetyt käyrät, jotka on piirretty harvemmillä pisteillä, ovat hieman epätarkempia.

Kuvassa 4 on konstruoitu kohdissa 3.4 ja 3.5 esitetyllä tavalla lasilaatan ääneneristysluku, jolle saatiin arvo $R_w = 28$ dB.



Kuva 3. $3/16''$ (4,76 mm) paksuisen lasilaatan ääneneristävyys R_z taajuuden funktiona eri tulokulmilla: $\theta = 0^\circ$; $\theta = 45^\circ$; $\theta = 85^\circ$ sekä ääneneristävyys R .



Kuva 4. $3/16''$ paksuisen lasilaatan laskennallinen ääneneristävyyskäyrä +, vertailukäyrä - ja niiden avulla laskettu ääneneristysluku R_w .

Massalaki

Taajuuden ollessa kriittiseen arvoon nähden pieni $f \approx f_c$, laatan äänenläpäisevyys-kertoimelle (104) saadaan

$$\tau_{\perp}^m = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi m f}{\rho c} \cos \theta\right)^2} \quad (108)$$

ja ääneneristävyydelle

$$R_{\perp}^m = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\pi m f}{\rho c} \cos \theta\right)^2 \right]. \quad (109)$$

Havaitaan, että nämä suureet eivät riipu laatan taivutusjäykkyydestä vaan pelkästään sen pintamassasta m . Puhutaan massalain mukaisista suureista ja symboleihin on lisätty yläindeksi m muistuttamaan tästä. Kaavat (108) ja (109) antavat siis laatan massalain mukaiset äänenläpäisevyyskertoimen ja ääneneristävyyden. Massalain yhteydessä on myös mahdollista johtaa [3] analyttiset kaavat laatan äänenläpäisevyyskertoimelle ja ääneneristävyydelle diffuusin kentän tapauksessa. Esitetään kaava (108) muodossa

$$\tau_{\perp}^m(\theta) = \frac{1}{1 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad (110)$$

missä on käytetty lyhennysmerkintää

$$a = \frac{\pi f m}{\rho c}. \quad (111)$$

Soveltamalla kaavaa (65) saadaan

$$\tau^m = \frac{2}{\sin^2 \bar{\theta}} \int_0^{\bar{\theta}} \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + a^2 \cos^2 \theta} d\theta \quad (112)$$

ja suorittamalla integrointi, massalain mukaiselle äänenläpäisevyyskertoimelle τ^m tulos

$$\tau^m = \frac{1}{a^2 \sin^2 \bar{\theta}} \ln \frac{1 + a^2}{1 + a^2 \cos^2 \bar{\theta}}. \quad (113)$$

Vastaavalle ääneneristävyydelle saadaan tulos

$$R^m \equiv 10 \lg \frac{1}{\tau^m} = 10 \lg \frac{a^2 \sin^2 \bar{\theta}}{\ln \frac{1 + a^2}{1 + a^2 \cos^2 \bar{\theta}}}. \quad (114)$$

Kuvassa 5 on esitetty isotrooppisen laatan ääneneristävyys $R_{\perp} = R_{\perp}(0^\circ)$ kohtisuoraan kohtaavalle ääniaallolle sekä kaavalla (114) lasketut vastaavat ääneneristävyydet R^m diffuusille kentälle, kun $\bar{\theta} = 78^\circ$ ja $\bar{\theta} = 90^\circ$, taajuuden ja massan tulon $f m$ funktiona. Vastaava kuva on lähteissä [1], [3] ja [4]. Yleensä $a \approx 1$, jolloin

$$R^m \approx 10 \lg \frac{a^2 \sin^2 \bar{\theta}}{\ln \frac{1}{\cos^2 \bar{\theta}}} = 10 \lg a^2 - 10 \lg \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{\ln \frac{1}{\cos^2 \bar{\theta}}}. \quad (115)$$

Sijoittamalla tähän $\bar{\theta} = 78^\circ$ saadaan

$$R^m \approx 10 \lg \left(\frac{\pi f m}{\rho c}\right)^2 - 5,16. \quad (116)$$

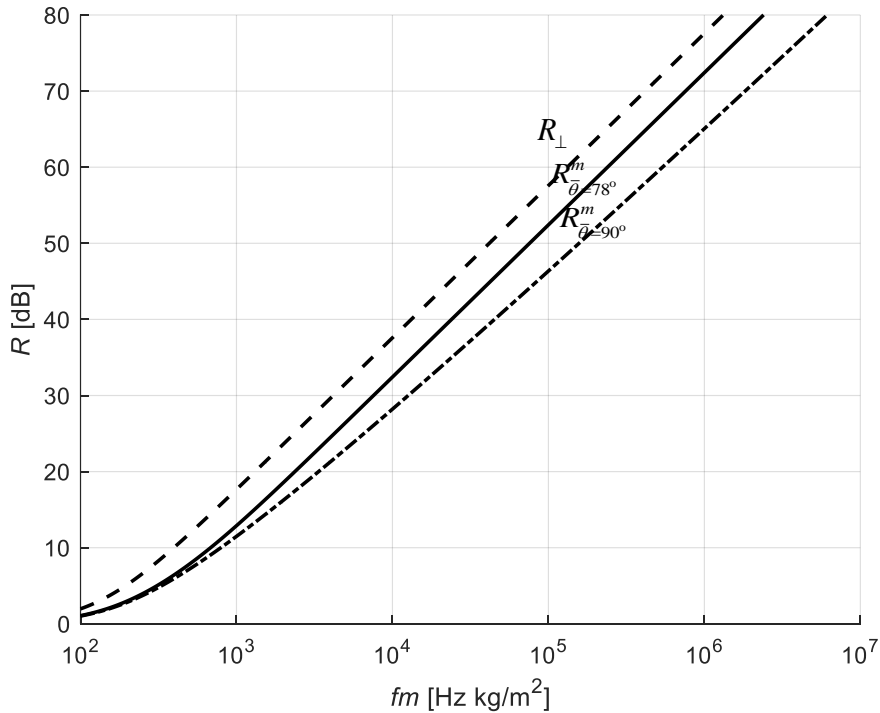
Laatan ääneneristävyydelle R_{\perp} saadaan kaavoilla (59) ja (104)

$$R_{\perp} \equiv R_{\perp}(0^{\circ}) = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\pi m f}{\rho c} \right)^2 \right] \approx 10 \lg \left(\frac{\pi m f}{\rho c} \right)^2. \quad (117)$$

Käytettiin hyväksi tietoa että $a \approx 1$. Näin saadaan yhteys

$$R^m \approx R_{\perp} - 5,16. \quad (118)$$

Tähän kaavaan perustuu yleisessä käytössä oleva sääntö, että massalain mukainen (kulmaa $\bar{\theta} = 78^{\circ}$ käyttäen laskettu) ääneneristävyyden R^m diffuusille kentälle on noin 5dB pienempi kuin kohtisuoraan kohtaavan aallon ääneneristävyyden.



Kuva 5. Käyrät ääneneristävyyden määrittämiseksi, kun massalaki on voimassa eli $f / f_c \approx 1$. Kohtisuoraan kohtaavan aallon ääneneristävyyden R_{\perp} ja massalain mukainen ääneneristävyyden R^m diffuusille kentälle laskettuna kaavalla (114), kun $\bar{\theta} = 78^{\circ}$ ja kun $\bar{\theta} = 90^{\circ}$.

Käyrästä isotrooppisen laatan ääneneristävyyden määrittämiseksi

Konstruoidaan lopuksi akustiikan oppikirjoissa [1], [3] esiintyvä käyrästä, jonka avulla isotrooppisen Kirchhoff-laatan ääneneristävyyden τ diffuusille kentälle voidaan määrittää graafisesti. Laatan äänenläpäisevyyden kertoimelle kohtisuoraan kohtaavalle ($\theta = 0^{\circ}$) ääniaallolle saadaan kaavalla (104)

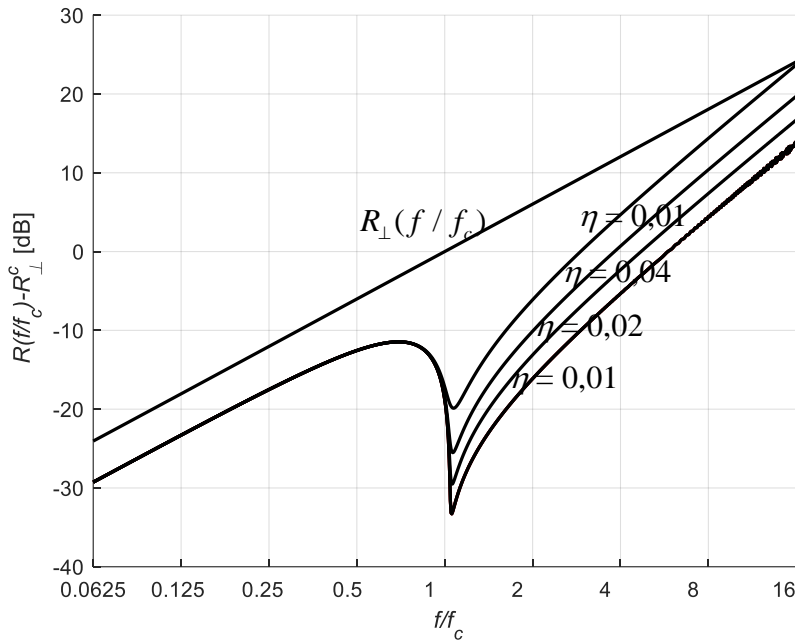
$$\tau_{\perp} \equiv \tau_{\perp}(0^{\circ}) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi m f}{\rho c} \right)^2} \quad (119)$$

ja sen arvolle kriittisellä taajuudella

$$\tau_{\perp}^c \equiv \tau_{\perp}(f_c) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\rho c}{\pi m f_c}\right)^2}. \quad (120)$$

Kaavojen (104) ja (120) perusteella kertoimien $\tau_{\perp}(\theta)$ ja τ_{\perp}^c suhde saa muodon

$$\frac{\tau_{\perp}(\theta)}{\tau_{\perp}^c} = \frac{1 + \left(\frac{\rho c}{\pi m f_c}\right)^2}{\left(\frac{\rho c}{\pi m f_c} + \eta \frac{f^3}{f_c^3} \sin^4 \theta \cos \theta\right)^2 + \left[\left(\frac{f}{f_c} - \frac{f^3}{f_c^3} \sin^4 \theta\right)^2 \cos^2 \theta\right]}. \quad (121)$$



Kuva 6. Käyrästä isotrooppisen Kirchhoff-laatan ääneneristävyyden määrittämiseksi taajuudella f eri häviökertoimilla η .

Olettamalla, että

$$\frac{\rho c}{\pi m f_c} \approx 1, \quad (122)$$

joka vastaa edellä käytettyä oletusta $a \approx 1$, kaava (121) yksinkertaistuu muotoon

$$\frac{\tau_{\perp}(\theta)}{\tau_{\perp}^c} = \frac{1}{\left[\left(\eta \frac{f^3}{f_c^3} \sin^4 \theta\right)^2 + \left(\frac{f}{f_c} - \frac{f^3}{f_c^3} \sin^4 \theta\right)^2\right] \cos^2 \theta}. \quad (123)$$

Koska τ_{\perp}^c on vakio, voidaan vastaava suhde τ / τ_{\perp}^c määrittää soveltamalla kaavaa (65) ja numeerista integrointia. Laatan ääneneristävyydelle diffuusille kentälle saadaan

$$R = 10 \log \frac{1}{\tau} = 10 \log \frac{\tau_{\perp}^c}{\tau} + 10 \log \frac{1}{\tau_{\perp}^c} = 10 \log \frac{\tau_{\perp}^c}{\tau} + R_{\perp}^c, \quad (124)$$

missä

$$R_{\perp}^c = 10 \log \frac{1}{\tau_{\perp}^c} = 10 \lg [1 + (\frac{\pi m f_c}{\rho c})^2] \quad (125)$$

on kriittisellä taajuudella määritetty kohtisuoraan kohtaavan aallon ääneneristävyyden erotus on

$$R - R_{\perp}^c = 10 \log \frac{\tau_{\perp}^c}{\tau}. \quad (126)$$

Kaavoja (123), (65) ja (126) soveltaen voidaan koordinaatistoon, jonka abskissa ja ordinaatta ovat f / f_c ja $R - R_{\perp}^c$ konstruoida käyriä. Nämä käyrät riippuvat ainoastaan suhteesta f / f_c ja häviökertoimesta η . Käyrästä on esitetty kuvassa 6 ja se on laatan ja myös sitä ympäröivän nesteen ominaisuuksista riippumaton. Vastaava käyrästä on esitetty ilman johtoa lähteissä [1] ja [3].

Ortotrooppinen laatta

Sijoittamalla aaltoimpedanssin lauseke (80) kaavaan (101), saadaan ortotrooppisen Kirchhoff-laatan äänenläpäisevyydelle vinosti kohtaavalle ääniaallolle lauseke

$$\tau_{\perp} = \frac{1}{\left| 1 + j \left(m\omega - \frac{B_x k_x^4 + 2H k_x^2 k_y^2 + B_y k_y^4}{\omega} \right) \frac{\cos \theta}{2\rho c} \right|^2}. \quad (127)$$

Laatan äänenläpäisevyydelle τ laskeminen diffuusille kentälle tapahtuu nyt numeerisesti kaavalla (64).

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 7 teräksistä aaltolevyä, jonka poikkileikkauksen keskiarvo on

$$z = a \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (128)$$

missä a on amplitudi ja l puolijakson pituus. Lähteen [7] mukaan laatan taivutusjäykkydet ovat

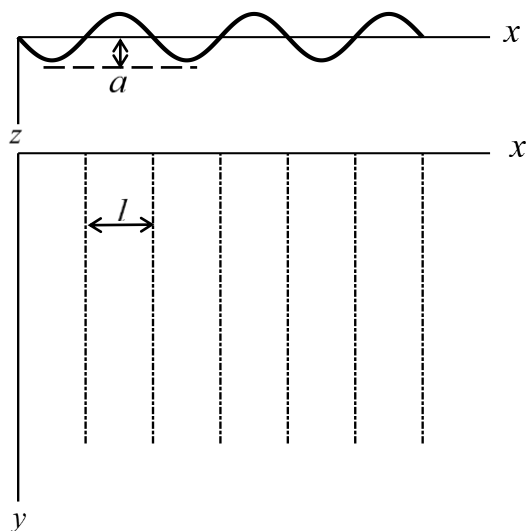
$$B_x = \frac{l}{s} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad B_y = EI, \quad H = \frac{s}{l} \frac{Eh^3}{12(1+\nu)}, \quad (129)$$

missä h on levyn seinämän paksuus, s puolijakson pituutta vastaava kaarenpituus ja I poikkileikkauksen jäyhyysmomentti pituutta kohden. Jälkimmäiset voidaan määrittää likikaavoilla

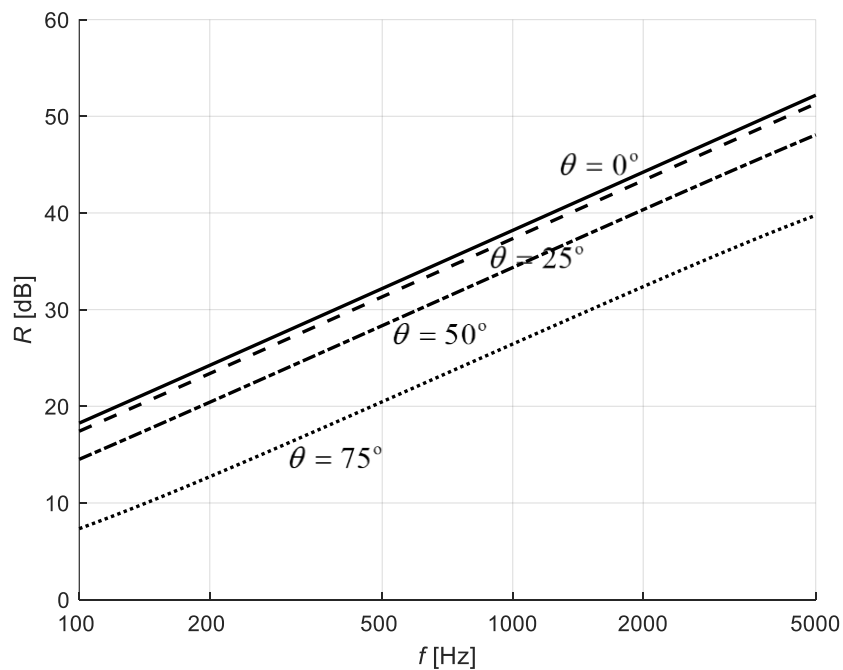
$$s \approx l \left[1 + \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right], \quad I \approx \frac{a^2 h}{2} \left[1 + \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{a}{l} \right)^2 \right]. \quad (130)$$

Teräksen kimmomoduuli, Poissonin luku, tiheys ja häviökerroin ovat $E = 2 \cdot 10^{11}$ N/m², $\nu = 0,3$, $\rho_s = 7700$ kg/m³ ja $\eta = 10^{-3}$. Lisäksi $l = 25$ mm, $a = 10$ mm levyn seinämän paksuus on $h = 1$ mm. Kuvissa 8, 9 ja 10 on esitetty aaltolevyn R_{\perp} taajuuden f funktiona suuntakulman ϕ arvoilla 0° , 45° ja 90° . Niihin on piirretty kohtaamiskulman θ arvoja 0° , 25° , 50° ja 75° vastaavat käyrät. Kuvassa 11 on esitetty aaltolevyn ja vertailun vuoksi saman paksuisen tasolevyn ääneneristävyyden R taajuuden f funktiona. Aaltole-

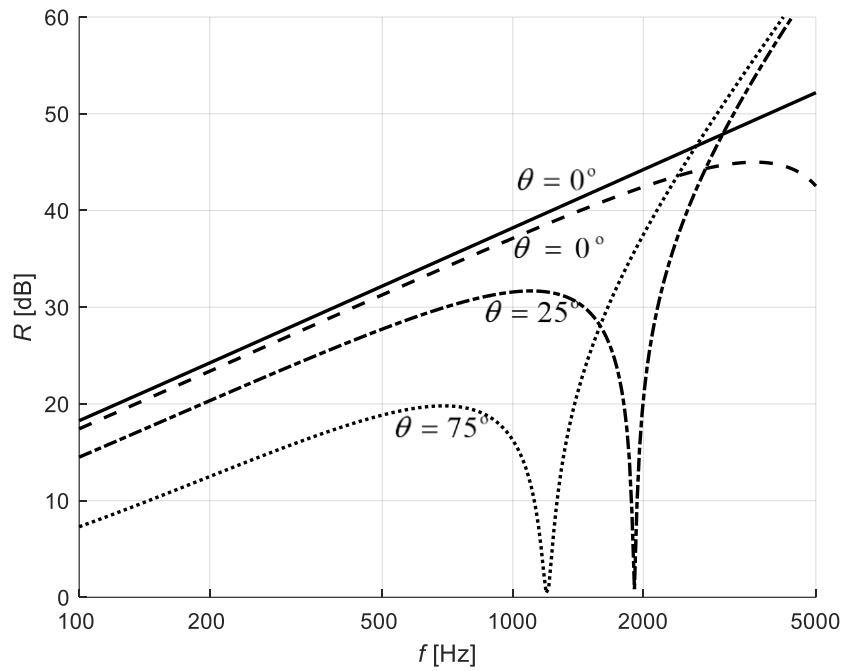
vyn ääneneristyslusun R_w määrittämistä havainnollistaa kuva 12. Sille saatiin arvo $R_w = 22$ dB. Vastaavan tasolevyn ääneneristyslusun arvoksi tuli $R_w = 28$ dB. Aaltolevy eristää siis ääntä huonommin kuin vastaava tasolevy.



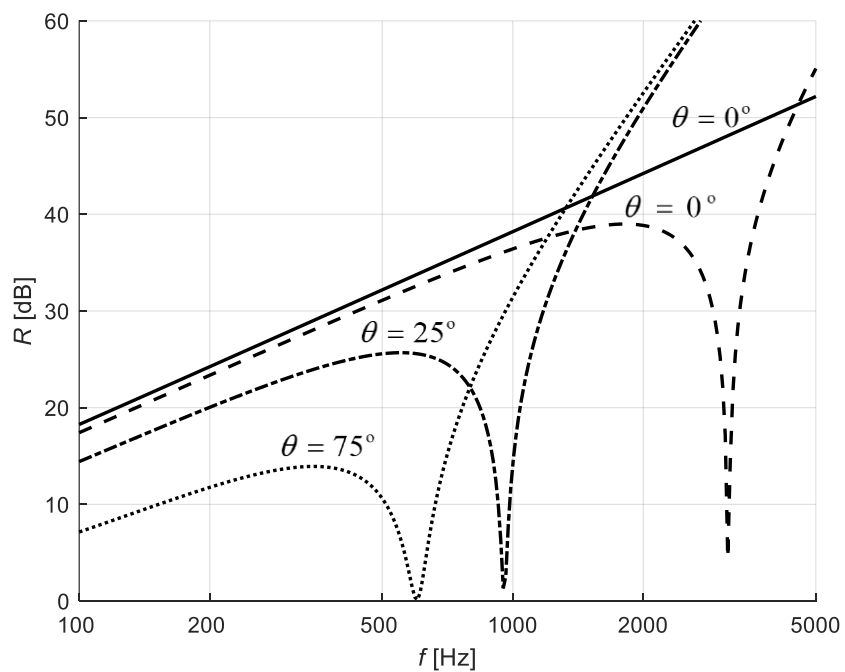
Kuva 7. Teräksinen aaltolevy



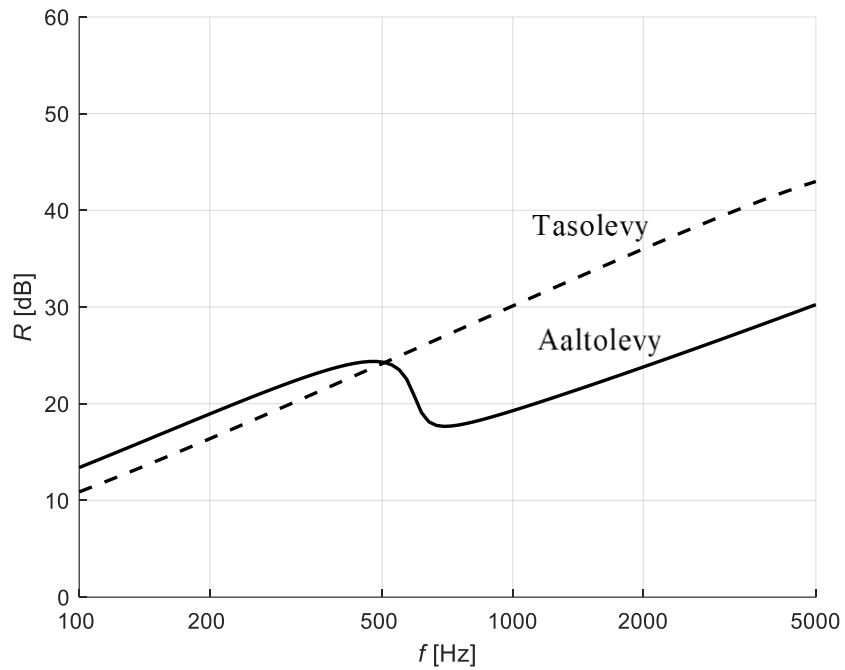
Kuva 8. Aaltolevyn ääneneristävyys R_z taajuuden f funktiona, kun $\phi = 0^\circ$ ja $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 75^\circ$.



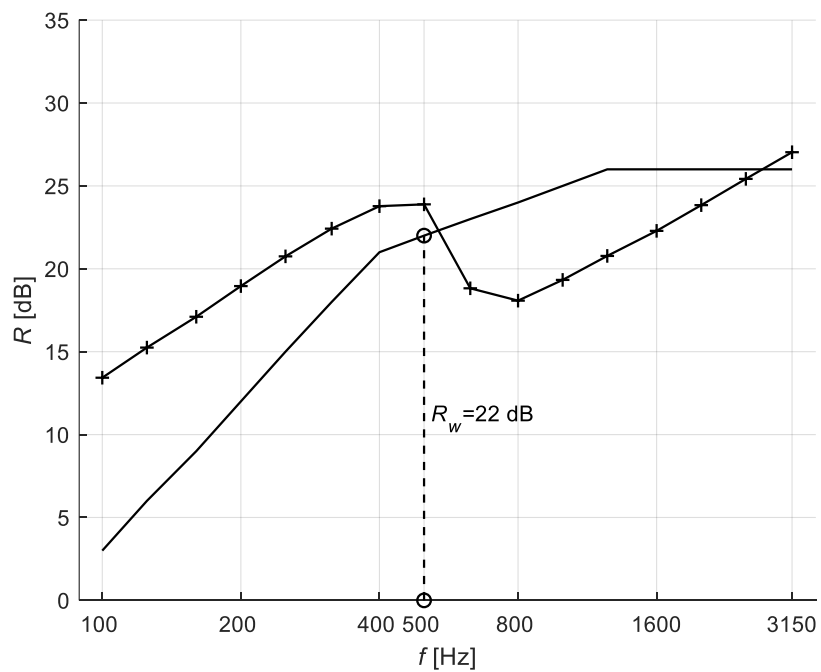
Kuva 9. Aaltolevyn ääneneristävyyys R_{\perp} taajuuden f funktiona, kun $\phi = 45^\circ$ ja $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 75^\circ$.



Kuva 10. Aaltolevyn ääneneristävyyys R_{\perp} taajuuden f funktiona, kun $\phi = 90^\circ$ ja $\theta = 0^\circ, 25^\circ, 50^\circ, 75^\circ$.



Kuva 11. Aaltolevyn ja saman paksuisen tasolevyn ääneneristävyyden R taajuuden f funktiona

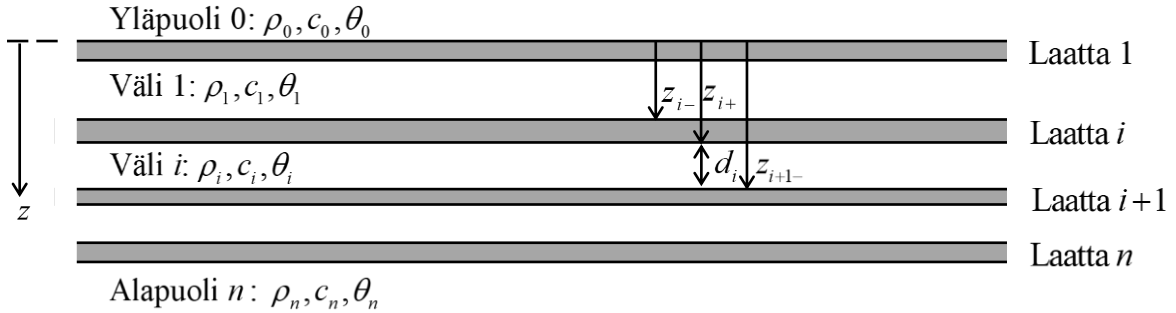


Kuva 12. Aaltolevyn laskennallinen ääneneristävyysskäyrä +, vertailuskäyrä – ja niiden avulla laskettu ääneneristysluku R_w .

Laatoista ja niiden välisistä nestekerroksista koostuva rakenne

Rakenne

Tarkastellaan kuvan 13 laatoista $i=1, \dots, n$ ja niiden välisistä nestekerroksista $i=1, \dots, n-1$ koostuvaa tasorakennetta. Ylä- ja alapuolen suureille käytetään alaindeksejä 0 ja n . Tarkastelussa x, y - taso yhtyy ylimmän laatan 1 yläpintaan, joten $z_{1-} = 0$.



Kuva 13. Laattarakenne

Laattojen $i=1, \dots, n$ kompleksisten kuorma- ja taipuma-amplitudien \hat{q}_i ja \hat{w}_i välillä on yhtälöä (74) vastaten yhtälöt

$$Z_i^* \hat{w}_i = \hat{q}_i, \quad i=1, \dots, n, \quad (131)$$

missä Z_i^* on laatan i aaltoimpedanssi.

Laattojen kompleksiset kuorma-amplitudit

Tarkastellaan ensin laattaa 1, jonka ylä- ja alapuolella olevat nesteet ovat 0 ja 1. Laatan jakautunut kuorma muodostuu sen ylä- ja alapintaan kohdistuvista paineista seuraavasti

$$\begin{aligned} q_1(x, y, t) &= p_0(x, y, 0, t) - p_1(x, y, z_{1+}, t) \\ &= (\hat{p}_l + \hat{p}_r - \hat{p}_{A1} e^{-jk_{z1}z_{1+}} - \hat{p}_{B1} e^{jk_{z1}z_{1+}}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \end{aligned} \quad (132)$$

Soveltaen kaavoja (32) ja (43) saadaan tästä

$$q_1(x, y, t) = \hat{q}_1 e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (133)$$

missä kuorma-amplitudi on

$$\hat{q}_1 = 2\hat{p}_l - \left(\frac{\rho_0 c_0}{\cos \theta_0} - j \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1} \cot k_{z1} d_1 \right) \hat{w}_1 - j \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1} \cot k_{z1} d_1 \hat{w}_2. \quad (134)$$

Tarkastellaan sitten laattaa i , jonka ylä- ja alapuolella olevat nesteet ovat $i-1$ ja i . Laatan jakautunut kuorma muodostuu sen ylä- ja alapintaan kohdistuvista paineista seuraavasti

$$\begin{aligned} q_i(x, y, t) &= p_{i-1}(x, y, z_{i-}, t) - p_i(x, y, z_{i+}, t) \\ &= (\hat{p}_{Ai-1} e^{-jk_{zi-1}z_{i-}} + \hat{p}_{Bi-1} e^{jk_{zi-1}z_{i-}} - \hat{p}_{Ai} e^{-jk_{zi}z_{i+}} - \hat{p}_{Bi} e^{jk_{zi}z_{i+}}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}. \end{aligned} \quad (135)$$

Soveltaen kaavoja (43) saadaan tästä

$$q_i(x, y, t) = \hat{q}_i e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad (136)$$

missä kuorma-amplitudi on

$$\begin{aligned}
\hat{q}_i = & -\frac{j}{\sin k_{z_{i-1}} d_{i-1}} \frac{\rho_{i-1} c_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} \hat{w}_{i-1} \\
& + j \left(\frac{\rho_{i-1} c_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} \cot k_{z_{i-1}} d_{i-1} + \frac{\rho_i c_i}{\cos \theta_i} \cot k_{z_i} d_i \right) \hat{w}_i \\
& - \frac{j}{\sin k_{z_i} d_i} \frac{\rho_i c_i}{\cos \theta_i} \hat{w}_{i+1}
\end{aligned} \tag{137}$$

Tarkastellaan lopuksi laattaa n , jonka ylä- ja alapuolella olevat nesteet ovat $n-1$ ja n . Laatan jakautunut kuorma muodostuu sen ylä- ja alapintaan kohdistuvista paineista seuraavasti

$$\begin{aligned}
q_n(x, y, t) = & p_{n-1}(x, y, z_{n-}, t) - p_n(x, y, z_{n+}, t) \\
= & (\hat{p}_{n-1+} e^{-jk_{zn-} z_{n-}} + \hat{p}_{n-1-} e^{jk_{zn-} z_{n-}} - \hat{p}_{n+} e^{-jk_{zn+} z_{n+}}) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}.
\end{aligned} \tag{138}$$

Soveltamalla kaavoja (43) ja (36) saadaan tästä

$$q_n(x, y, t) = \hat{q}_n e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} \tag{139}$$

missä kuorma-amplitudi on

$$\hat{q}_n = -\frac{j}{\sin k_{z_{n-1}} d_{n-1}} \frac{\rho_{n-1} c_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \hat{w}_{n-1} - \left(\frac{\rho_n c_n}{\cos \theta_n} - j \frac{\rho_{n-1} c_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \cot k_{z_{n-1}} d_{n-1} \right) \hat{w}_n. \tag{140}$$

Yhtälöryhmä kompleksisille taipuma-amplitudeille

Sijoittamalla kuorma-amplitudit (134), (137) ja (140) yhtälöihin (131) saadaan yhtälöryhmä

$$\mathbf{Z} \hat{\mathbf{w}} = 2 \hat{\mathbf{p}}_I, \tag{141}$$

missä

$$\hat{\mathbf{w}} = \begin{Bmatrix} \hat{w}_1 \\ \vdots \\ \hat{w}_n \end{Bmatrix} \tag{142}$$

on kompleksisten taipumanopeusamplitudien muodostama pystyvektori ja $\hat{\mathbf{p}}_I$ on vakiovektori, jonka ensimmäinen alkio on tuloaallon kompleksinen paineamplitudi \hat{p}_I ja muut alkioit ovat nollia. Matriisia \mathbf{Z} kutsutaan tässä systeemin impedanssimatriisiksi ja sen nollasta eroavat alkioit ovat

$$\begin{aligned}
Z_{11} &= Z_1^* + \frac{\rho_0 c_0}{\cos \theta_0} - j \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1} \cot k_{z_1} d_1, \\
Z_{12} &= j \frac{\rho_1 c_1}{\cos \theta_1} \frac{1}{\sin k_{z_1} d_1}, \\
Z_{i,i-1} &= j \frac{\rho_{i-1} c_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} \frac{1}{\sin k_{z_{i-1}} d_{i-1}}, \\
Z_{i,i} &= Z_i^* - j \frac{\rho_{i-1} c_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} \cot k_{z_{i-1}} d_{i-1} - j \frac{\rho_i c_i}{\cos \theta_i} \cot k_{z_i} d_i, \\
Z_{i,i+1} &= j \frac{\rho_i c_i}{\cos \theta_i} \frac{1}{\sin k_{z_i} d_i}, \\
Z_{n,n-1} &= j \frac{\rho_{n-1} c_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \frac{1}{\sin k_{z_{n-1}} d_{n-1}}, \\
Z_{n,n} &= Z_n^* + \frac{\rho_n c_n}{\cos \theta_n} - j \frac{\rho_{n-1} c_{n-1}}{\cos \theta_{n-1}} \cot k_{z_{n-1}} d_{n-1},
\end{aligned}
\left. \vphantom{\begin{aligned} Z_{11} \\ Z_{12} \\ Z_{i,i-1} \\ Z_{i,i} \\ Z_{i,i+1} \\ Z_{n,n-1} \\ Z_{n,n} \end{aligned}} \right\} i = 2, \dots, n-1. \quad (143)$$

Jatkossa tarvitsemme pelkästään alimman laatan n taipumanopeuden kompleksista amplitudia \hat{w}_n soveltamalla Cramerin sääntöä [6] yhtälöryhmään (141) saadaan sille tulos

$$\hat{w}_n = 2 \frac{\det \mathbf{Z}_n}{\det \mathbf{Z}} \hat{p}_I, \quad (144)$$

missä $\det \mathbf{Z}_n$ on sen matriisin \mathbf{Z}_n determinantti, joka saadaan matriisista \mathbf{Z} , kun sen viimeisen sarakkeen ensimmäinen termi korvataan ykkösellä ja muut termit nolilla.

Läpäisseen aallon kompleksisen paineamplitudin määrittäminen

Läpäisseen aallon paineamplitudille $\hat{p}_T = \hat{p}_+$ saadaan kaavan (36) perusteella

$$\hat{p}_T = e^{jk_z z_{n+}} \frac{\rho_n c_n}{\cos \theta_n} \hat{w}_n. \quad (145)$$

Sijoittamalla siihen lauseke (144) saadaan läpäisseen aallon paineen amplitudille tulos

$$\hat{p}_T = e^{jk_z z_{n+}} \frac{2\rho_n c_n}{\cos \theta_n} \frac{\det \mathbf{Z}_n}{\det \mathbf{Z}} \hat{p}_I. \quad (146)$$

Rajoitutaan tässä tyypilliseen tapaukseen, jossa rakenteen molemmilla puolilla on ilmaa, jolloin $\rho_n = \rho$, $c_n = c$, $\theta_n = \theta$. Rakenteen äänenläpäisevyyskerroin τ_z saadaan nyt kaavalla (58) ja ääneneristävyys R_z kaavalla (59).

Kaksoisseinämän ääneneristävyys

Kahdesta identtisesti laatasta ja niiden välisestä ilmaraosta koostuva kaksoisseinä on tärkeä käytännön sovellus. Liitteessä B on johdettu soveltamalla kaavoja (143) ja (146) sen läpäisseen aallon kompleksiselle paineamplitudille lauseke

$$\hat{p}_T = \frac{e^{2jk_z h}}{1 + \frac{Z^* \cos \theta}{\rho c} + \left(\frac{Z^* \cos \theta}{2\rho c}\right)^2 (1 - e^{-2jk_z d})} \hat{p}_I, \quad (147)$$

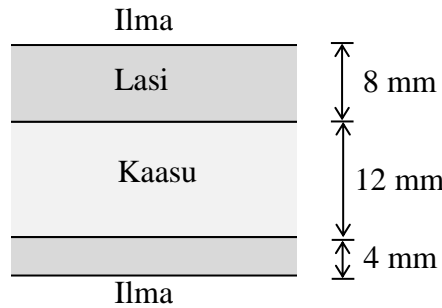
missä d on laattojen välisen ilmatilan paksuus ja h on laatan paksuus. Tämä tulos on alun perin esitetty lähteessä [9] sillä erolla, että oikean puolen termi $e^{2jk_z h}$ puuttuu. Ero johtuu siitä, että kyseisessä artikkelissa laattojen paksuudet on otaksuttu ilmatilan paksuuteen nähden häviävän pieneksi ($h/d \ll 1$), kun taas tässä artikkelissa näin ei ole menetelty. Liitteessä B on myös johdettu kaksoisseinämän ääneneristävyydelle kaava lauseke

$$R_z = 10 \lg \left| 1 + \frac{Z^* \cos \theta}{\rho c} + \left(\frac{Z^* \cos \theta}{2\rho c}\right)^2 (1 - e^{-2jk_z d}) \right|^2. \quad (148)$$

Laatan aaltoimpedanssi on yleisessä tapauksessa kompleksinen ja voidaan esittää muodossa $Z^* = X^* + jY^*$. Vaimentamattomassa tapauksessa ($\eta = 0$) se on imaginaarinen ja muotoa $Z^* = jY^*$, missä Y^* on reaalinen. (Tämä voidaan todeta Kirchhoff-laatan tapauksessa kaavojen (80) ja (77) sekä Reissner–Mindlin-laatan tapauksessa kaavojen (89) ja (86) perusteella.) Liitteessä B on vielä johdettu reaali- ja imaginaariosa kaava

$$R_z = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{Y^* \cos \theta}{\rho c}\right)^2 (\cos k_z d - \frac{Y^*}{2\rho c} \cos \theta \sin k_z d)^2 \right], \quad (149)$$

jolla kaksoisseinämän ääneneristävyys voidaan laskea vaimentamattomassa tapauksessa. Tämä tulos on esitetty lähteessä [4]. Todetaan, että tässä artikkelissa käytetty laattojen paksuuksien täsmällisempi käsittely ei kuitenkaan paranna ääneneristävyydelle saatavia tuloksia.

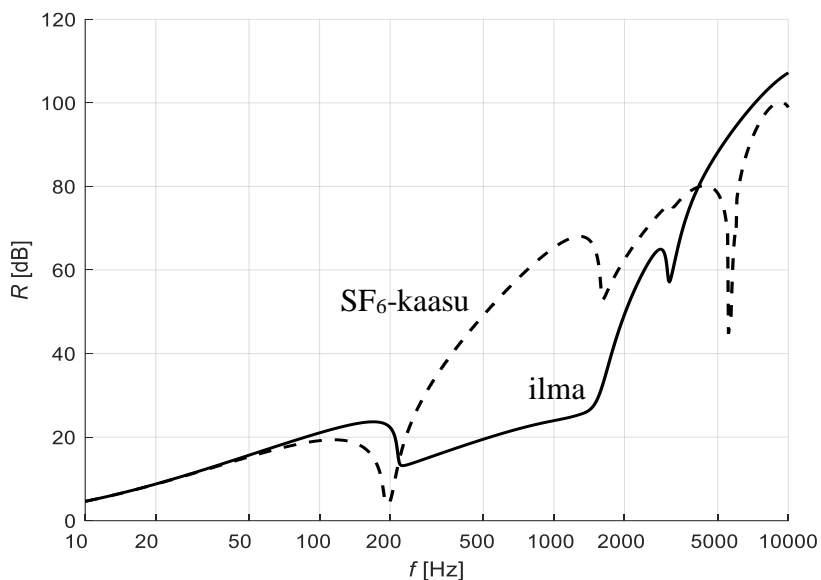


Kuva 14. Kahdesta lasista ja niiden välisestä kaasusta muodostuva ikkuna

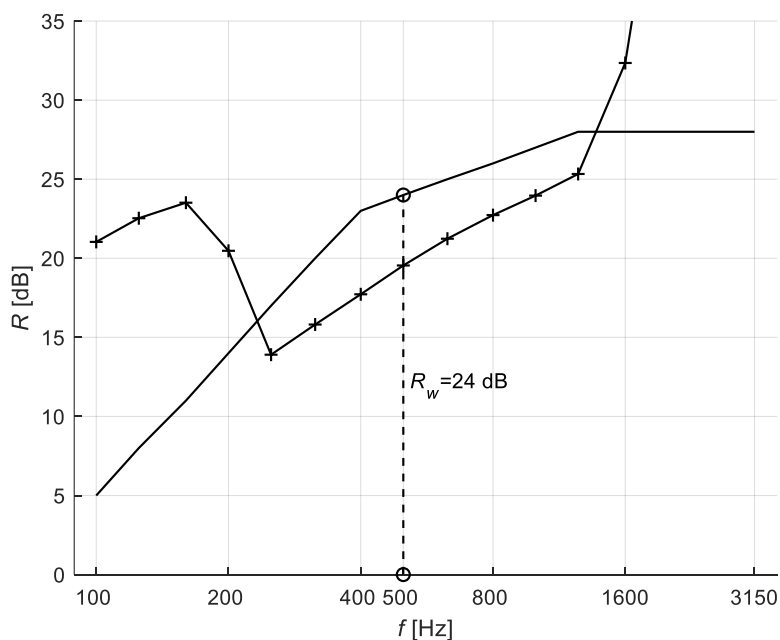
Kahdesta lasista ja niiden välisestä kaasusta muodostuva ikkuna

Tarkastellaan esimerkkinä kuvan 14 kahdesta lasista ja niiden välisestä kaasusta muodostuvaa ikkunaa. Verrataan ikkunan ääneneristävyyttä, kun välikaasuna on ilma tai raskas SF_6 -kaasu. Ilman tiheys ja äänen nopeus ilmassa ovat $\rho_0 = 1,21 \text{ kg/m}^3$ ja $c_0 = 343 \text{ m/s}$ sekä SF_6 -kaasun vastaavat suureet $\rho_1 = 6,12 \text{ kg/m}^3$ ja $c_1 = 133 \text{ m/s}$. Lasin kimmomoduuli, Poissonin luku, häviökerroin ja tiheys ovat $E = 6,76 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,33$, $\eta = 1 \cdot 10^{-2}$ ja $\rho = 2400 \text{ kg/m}^3$. Kuvassa 15 on esitetty ikkunan ääneneristävyys R taajuuden f funktiona, kun välikaasuna on ilma ja SF_6 -kaasu. Kuvissa 16 ja 17 on esitetty

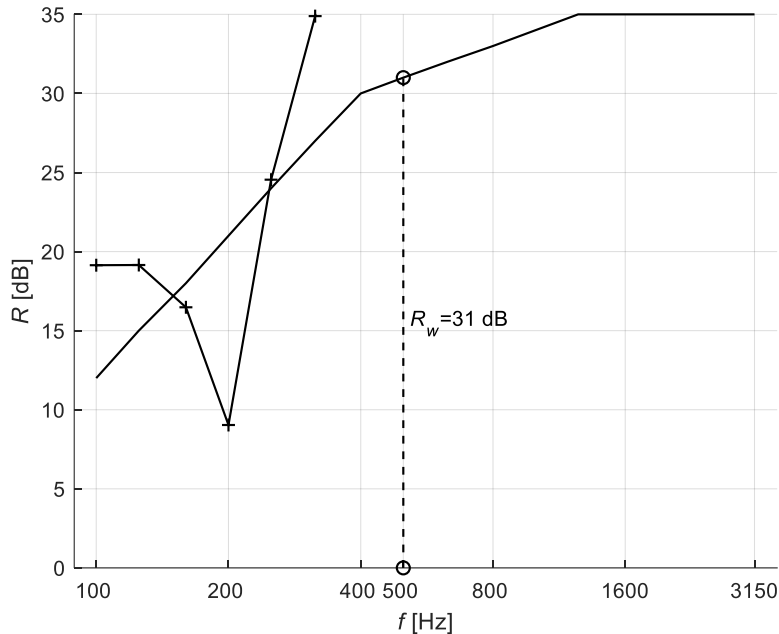
ikkunan laskennallinen ääneneristävyyskäyrä, vertailukäyrä ja niiden avulla määritetty ääneneristysluku R_w , kun välikaasuna on ilma ja SF₆-kaasu. Ääneneristyslukuiksi saatiin ilman ja kaasun tapauksissa $R_w = 24$ dB ja $R_w = 31$ dB.



Kuva 15. Ikkunan ääneneristävyys R taajuuden f funktiona



Kuva 16. Ikkunan laskennallinen ääneneristävyyskäyrä +, vertailukäyrä – ja niiden avulla määritetty ääneneristysluku R_w , kun lasien välissä on ilmaa.



Kuva 17. Ikkunan laskennallinen ääneneristävyysskäyrä +, vertailuskäyrä – ja niiden avulla määritetty ääneneristysluku R_w , kun lasien välissä on raskasta SF_6 kaasua

Johtopäätökset

Artikkelissa käsiteltiin rakenteiden ilmaääneneristävyyden laskennalliseen määrittämiseen liittyviä kysymyksiä ja laskennan eri vaiheita. Erityisesti tarkasteltiin laattoja ja niistä koostuvia kerroksellisia tasorakenteita. Ääniaaltojen rakenteen molemmin puolin sekä mahdollisissa laattojen välisissä raoissa oletettiin olevan tasoaltoja. Laattojen otaksuttiin olevan (x, y) -tason suuntaisia ja ulottuvan tasossaan äärettömän kauas. Näiden otaksu- mien vallitessa rakenteen ääneneristävyydelle vinosti kohtaavalle ääniaallolle on ole- massa analyttisiä ratkaisuja, joista muutamia tässä artikkelissa pyrittiin johtamaan mah- dollisimman selkeästi ja johdonmukaisesti. Tällaiset ratkaisut mahdollistavat rakenteen ääneneristävyyden määrittämisen diffuusille kentälle ja koko ääneneristävyystehtävän ratkaisemisen kohtuullisessa ajassa. Rajoitustensa vuoksi laskentamalli ei kuitenkaan huomioi rakenteen tukia eikä sen liittymistä muihin rakenteisiin. Tämän vuoksi sillä saadut tulokset eivät välttämättä kovin hyvin vastaa laboratoriossa tai kenttäolosuhteissa saatuja koetuloksia. Ne voivat kuitenkin olla suuntaa-antavia esimerkiksi verrattaessa erilaisten rakenteiden ilmanääneneristävyyttä toisiinsa.

Viitteet

- [1] L.L. Beranek, I.L. Ver, *Noise and Vibration Control Engineering, Principles and Applications*. John Wiley & Sons. Inc., 1992.
- [2] L. Cremer, M. Heckl, B.A.T. Petersson, *Structure-Borne Sound, Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies*. 3rd Edition, Springer-Verlag, 2005.
- [3] D.G. Reynolds, *Engineering Principles of Acoustics, Noise and Vibration control*, Allyn and Bacon, Inc., 1981.
- [4] L.L. Beranek, *Sound reduction*, McGraw-Hill, 1960, pp. 290–298.
- [5] *Ääneneristys ohjeet*, C5, Ympäristöministeriö 1985.
- [6] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 7th Edition, John Wiley & Sons Inc., 1993.
- [7] S.P. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
- [8] R.D. Mindlin, Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motion of Elastic Plates, *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951) 31–38.
- [9] A. London, Transmission of reverberant sound through double walls, *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 44 (1950) RP1998.
<http://dx.doi.org/10.6028/jres.044.006>

Jukka Aalto

Aalto-yliopisto, Insinööritieteiden korkeakoulu, Rakennustekniikan laitos

PL 12100, 00076 Aalto

jukka.aalto@aalto.fi

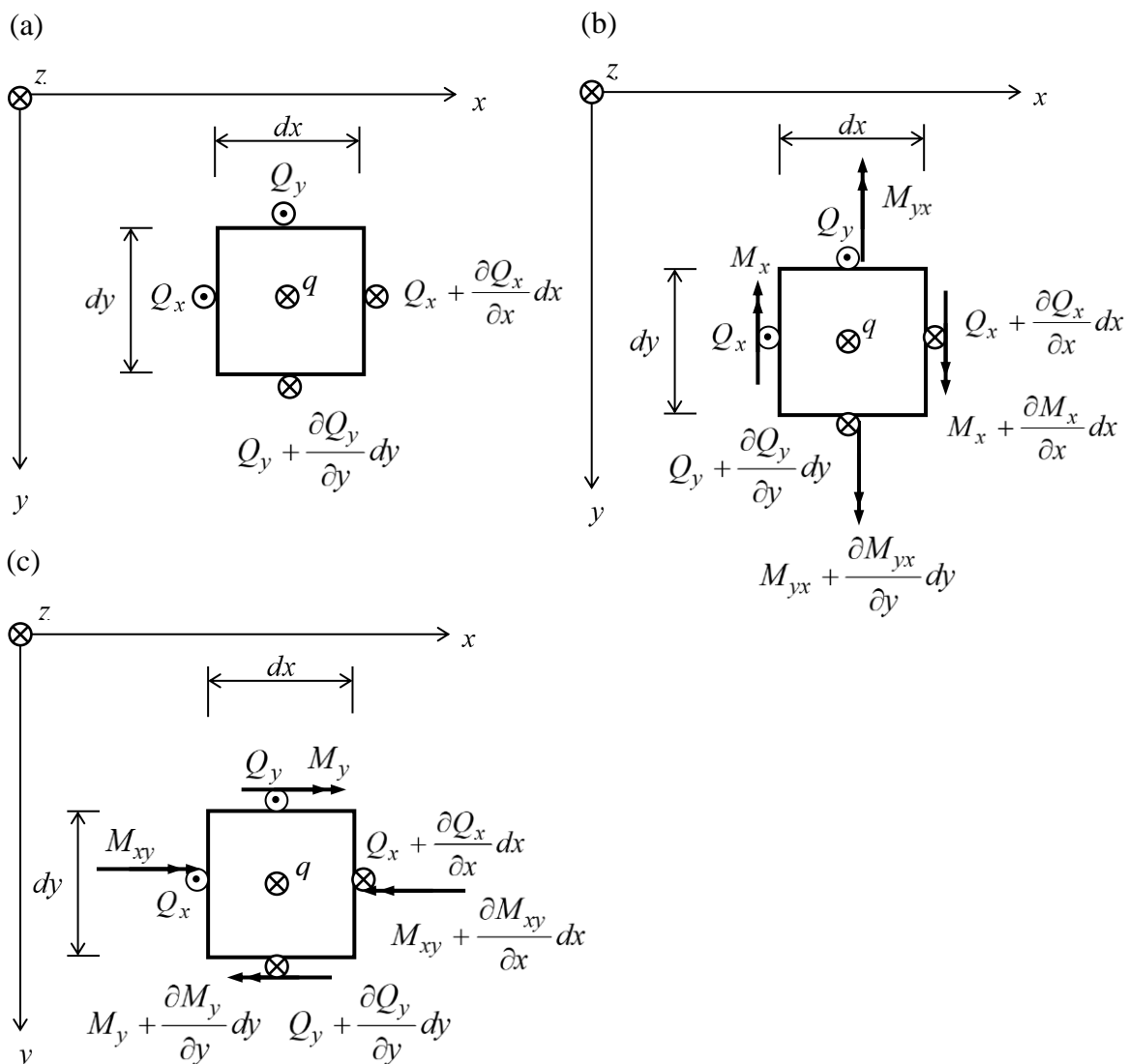
Liite A: Isotrooppisen Reissner–Mindlin-laatan taipuman differentiaaliyhtälön johto

A.1 Laatan liikeyhtälöt rotaatiohitaus huomioiden

Koska rakenteiden mekaniikan oppikirjoissa ei tavallisesti esitetä laatan liikeyhtälöitä rotaatiohitaus huomioiden, johdetaan ne tässä. Differentiaaliseen laatan osaan vaikuttava z -akselin suuntainen voimaresultantti on kuvan A.1 (a) perusteella

$$\begin{aligned} dF_z &= (-Q_x + Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx)dy + (-Q_y + Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy)dx + qdxdy \\ &= (\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q)dxdy, \end{aligned} \tag{A.1}$$

missä Q_x ja Q_y ovat laatan leikkausvoimat ja q on jakautunut kuorma.



Kuva A.1 Differentiaaliseen laatan osaan vaikuttavia voimia ja momentteja liikeyhtälöiden johtamista varten

Differentiaaliseen laatan osaan vaikuttava momenttiresultantti sen keskipisteen kautta kulkevan y -akselin suuntaisen akselin suhteen on kuvan A.1 (b) perusteella

$$\begin{aligned}
dM_y &= -Q_x dy \frac{dx}{2} - (Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx) dy \frac{dx}{2} \\
&\quad + (-M_x + M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx) dy + (-M_{yx} + M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} dy) dx \\
&= (-Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}) dx dy - \frac{1}{2} \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx^2 dy \\
&\approx (-Q_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}) dx dy.
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Differentiaaliseen laatan osaan vaikuttava momenttiresultantille sen keskipisteen kautta kulkevan x -akselin suuntaisen akselin suhteen saadaan kuvan A.1 (c) perusteella vastaavasti

$$dM_x = (Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y}) dx dy. \tag{A.3}$$

Lausekkeissa (A2) ja (A3) M_x ja M_y ovat laatan taivutusmomentit ja $M_{xy} = M_{yx}$ on vääntömomentti. Momenttiresultanttien dM_x ja dM_y positiiviset suunnat on valittu tässä oikean käden ruuvisäännön mukaisesti. Jäykäksi kappaleeksi otaksutun differentiaalisen laatan osan vastaavia rotaatiokomponentteja merkitään tässä θ_x ja θ_y . Sen liikeyhtälöt ovat

$$dF_z = m dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad dM_x = J dx dy \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2}, \quad dM_y = J dx dy \frac{\partial^2 \theta_y}{\partial t^2}. \tag{A.4}$$

missä m on laatan massa ja J sen rotaatiohitais pintayksikköä kohti ja w on taipuma. Rotaatiokomponenteilla θ_x , θ_y ja laatan normaalin kiertymillä φ_x , φ_y on yhteydet

$$\theta_x = \varphi_y, \quad \theta_y = -\varphi_x. \tag{A.5}$$

Niitä käyttäen laatan osan liikeyhtälöt (A.4) saavat muodon

$$dF_z = m dx dy \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad dM_y = -J dx dy \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2}, \quad dM_x = J dx dy \frac{\partial^2 \varphi_y}{\partial t^2}. \tag{A.6}$$

Sijoittamalla näihin lausekkeet (A.1), (A.2) ja (A.3) ja jakamalla puolittain tulolla $dx dy$ saadaan laatan liikeyhtälöiksi

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q + m \frac{d^2 w}{dt^2}, \\
Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + J \frac{d^2 \varphi_y}{dt^2}, \\
Q_y &= \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} + J \frac{d^2 \varphi_x}{dt^2}.
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Tavanomaiset liikeyhtälöt, joissa rotaatiohitautta ei huomioida, saadaan näistä asettamalla $J = 0$.

A.2 Isotrooppisen Reissner–Mindlin-laatan taipuman differentiaaliyhtälö

Johdetaan isotrooppiselle Reissner–Mindlin-laatalle osittaisdifferentiaaliyhtälö, jossa tuntemattomana on pelkästään taipuma. Laatan muut yhtälöt liikeyhtälöiden (A.7) lisäksi oletetaan tässä yleisesti tunnetuiksi ja annetaan ilman johtoa. Normaalien kiertymien, taipuman ja liukumakulmien yhteydet ovat

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_x, \quad \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_y, \quad (\text{A.8})$$

missä γ_x ja γ_y ovat liukumakulmat. Momenttien ja normaalinkiertymien yhteydet ovat

$$M_x = -B\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right), \quad M_y = -B\left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}\right), \quad M_{xy} = -B \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}\right), \quad (\text{A.9})$$

missä B on laatan taivutusjäykkyys. Leikkausvoimien ja liukumakulmien yhteydet ovat

$$Q_x = S\gamma_x, \quad Q_y = S\gamma_y, \quad (\text{A.10})$$

missä S on laatan leikkausjäykkyys. Johdetaan taipuman differentiaaliyhtälö lähtien näistä yhtälöistä. Yhtälöistä (A.7) ja (A.9) seuraa

$$(B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2})\left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}\right) = q - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{A.11})$$

missä

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (\text{A.12})$$

Sijoittamalla tähän normaalin kiertymien lausekkeet (A.8) ja ottamalla huomioon yhteydet (A.10) saadaan

$$(B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2})\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - (B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{1}{S} \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y}\right) = q - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{A.13})$$

ja ottamalla vielä huomioon yhteys (A.7a) ensin

$$(B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2})\nabla^2 w - (B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \frac{1}{S} (-q + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}) = q - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (\text{A.14})$$

sitten

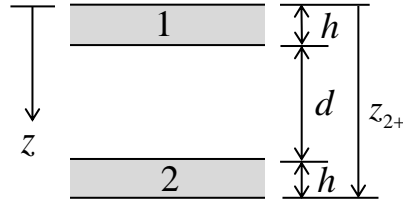
$$(\nabla^2 - \frac{m}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(B\nabla^2 - J \frac{\partial^2}{\partial t^2})w + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (1 - \frac{B}{S} \nabla^2 + \frac{J}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2})q \quad (\text{A.15})$$

ja lopuksi

$$B\nabla^4 w - (J + \frac{mB}{S})\nabla^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{mJ}{S} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q - \frac{B}{S} \nabla^2 q + \frac{J}{S} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}. \quad (\text{A.16})$$

Tätä yhtälöä kutsutaan tässä artikkelissa isotrooppisen Reissner–Mindlin-laatan taipuman differentiaaliyhtälöksi. Se on esitetty homogeeniselle laatalle lähteessä [8]. Kirjoittajan käsityksen mukaan vastaavaa yhtälöä, jossa tuntemattomana on pelkkä taipuma, ei voida johtaa ortotrooppiselle Reissner–Mindlin-laatalle.

Liite B: Kaksoisseinämän ääneneristävyuden kaavojen johto



Kuva B.1 Kaksoisseinä

Tarkastellaan kuvan B.1 kahdesta identtisesti laatasta ja niiden välisestä ilma-araosta koostuvaa kaksoisseinämää. Kaavan (143) perusteella impedanssimatriisin alkiolle saadaan

$$\begin{aligned}
 Z_{11} = Z_{22} &= Z^* + \frac{\rho c}{\cos \theta} (1 - j \cot k_z d) = Z^* + \frac{\rho c}{\cos \theta} \frac{\sin k_z d - j \cos k_z d}{\sin k_z d} \\
 &= Z^* - j \frac{\rho c}{\cos \theta} \frac{\cos k_z d + j \sin k_z d}{\sin k_z d} = Z^* + \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{e^{jk_z d}}{e^{jk_z d} - e^{-jk_z d}} \\
 &= Z^* + \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{1}{1 - e^{-2jk_z d}} = \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \left(\gamma + \frac{1}{1 - e^{-2jk_z d}} \right), \\
 Z_{12} = Z_{21} &= j \frac{\rho c}{\cos \theta} \frac{1}{\sin k_z d} = - \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{1}{e^{jk_z d} - e^{-jk_z d}} = - \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{e^{-jk_z d}}{1 - e^{-2jk_z d}}.
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

missä otettiin käyttöön väliaikainen lyhennysmerkintä

$$\gamma = \frac{Z^* \cos \theta}{2 \rho c}. \tag{B.2}$$

Läpäisseen aallon amplitudille \hat{p}_T saadaan kaavan (146) perusteella

$$\hat{p}_T = e^{jk_z z_{2+}} \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{\det \mathbf{Z}_2}{\det \mathbf{Z}} \hat{p}_I = e^{jk_z (d+2h)} \frac{2 \rho c}{\cos \theta} \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{21} - Z_{12}Z_{21}} \hat{p}_I. \tag{B.3}$$

ja sijoittamalla tähän tulokset (B.1) edelleen

$$\hat{p}_T = e^{jk_z (d+2h)} \frac{e^{-jk_z d}}{(\gamma + \frac{1}{1 - e^{-2jk_z d}})^2 - \frac{e^{-2jk_z d}}{(1 - e^{-2jk_z d})^2}} \hat{p}_I = \frac{e^{2jk_z h}}{1 + 2\gamma + \gamma^2 (1 - e^{-2jk_z d})} \hat{p}_I \tag{B.4}$$

ja huomioimalla yhteys (B.2) lopulta

$$\hat{p}_T = \frac{e^{2jk_z h}}{1 + \frac{Z^* \cos \theta}{\rho c} + (\frac{Z^* \cos \theta}{2 \rho c})^2 (1 - e^{-2jk_z d})} \hat{p}_I. \tag{B.5}$$

Ääneneristävyyskertoimelle saadaan nyt

$$\tau_z \equiv \left| \frac{\hat{p}_T}{\hat{p}_I} \right|^2 = \frac{1}{\left| 1 + \frac{Z^* \cos \theta}{\rho c} + (\frac{Z^* \cos \theta}{2 \rho c})^2 (1 - e^{-2jk_z d}) \right|^2} \tag{B.6}$$

ja ääneneristävyydelle

$$R_z \equiv 10 \lg \frac{1}{\tau_z} = 10 \lg \left| 1 + \frac{Z^* \cos \theta}{\rho c} + \left(\frac{Z^* \cos \theta}{2\rho c} \right)^2 (1 - e^{-2jk_z d}) \right|^2. \quad (\text{B.7})$$

Vaimentamattomassa tapauksessa ($\eta = 0$) aaltoimpedanssi on muotoa $Z^* = jY^*$, missä Y^* on reaalinen. Lauseke (B.7) saa tällöin aluksi muodon

$$R_z = 10 \lg \left| 1 + j \frac{Y^* \cos \theta}{\rho c} - \left(\frac{Y^* \cos \theta}{2\rho c} \right)^2 (1 - e^{-2jk_z d}) \right|^2. \quad (\text{B.8})$$

Käyttämällä väliaikaista lyhennysmerkintää

$$\beta = \frac{Y^* \cos \theta}{2\rho c} \quad (\text{B.9})$$

muokataan lauseketta (B.8) edelleen seuraavasti

$$\begin{aligned} R_z &= 10 \lg \left| 1 + 2j\beta - \beta^2 (1 - e^{-2jk_z d}) \right|^2 \\ &= 10 \lg \left| 1 + 2j\beta - \beta^2 (1 - \cos 2k_z d + j \sin 2k_z d) \right|^2 \\ &= 10 \lg \left| 1 + 2j\beta - 2\beta^2 (\sin^2 k_z d + j \sin k_z d \cos k_z d) \right|^2 \\ &= 10 \lg \left| 1 - 2\beta^2 \sin^2 k_z d + 2j(\beta - \beta^2 \sin k_z d \cos k_z d) \right|^2 \quad (\text{B.10}) \\ &= 10 \lg [(1 - 2\beta^2 \sin^2 k_z d)^2 + 4(\beta - \beta^2 \sin k_z d \cos k_z d)^2] \\ &= 10 \lg [1 + 4\beta^2 (\cos^2 k_z d - 2\beta \sin k_z d \cos k_z d + \beta^2 \sin^2 k_z d)] \\ &= 10 \lg [1 + 4\beta^2 (\cos k_z d - \beta \sin k_z d)^2]. \end{aligned}$$

Huomioimalla yhteys (B.9) saadaan kaksoiseinämän ääneneristävyydelle reaali-
muotoinen kaava

$$R_z = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{Y^* \cos \theta}{\rho c} \right)^2 (\cos k_z d - \frac{Y^* \cos \theta}{2\rho c} \sin k_z d)^2 \right]. \quad (\text{B.11})$$