

Kirkkoveneen soutamisen malli

Matti A. Ranta ja Laila Hosia

Tiivistelmä. Kirkkovenesoudulle saadaan yksinkertaistettu malli yhdistämällä veneen liikeyhtälö ja airojen rotaatioyhtälö. Voima vedossa asetetaan yhtäsuureksi kuin vastus koko syklin eli vedon ja airon palautuksen aikana. Veneen matkavauhdin määrittävät veneen liikevastus ja vetojen lukumäärä minuutissa, vedon pituus sekä syklin rytmi. Soutajan kestävyys arvioidaan soutajan hapenottokyvystä.

Avainsanat: liikeyhtälö, matkavauhti, sykli, veto- ja palautusvaihe, vedonpituus, tahti

Vastaanotettu: 28.9.2018. *Hyväksytty:* 1.3.2020. *Julkaistu verkossa:* 13.3.2020.

Johdanto

Soutu ei enää ole arkipäiväinen kulkutapa vaan urheiluharrastus. Soutuun voi liittää kiintoisasti myös matematiikan ja mekaniikan harrastuksen. Veneen kulkua vedessä voi kuvata Newtonin peruslaista johdetulla liikeyhtälöllä ja airon liikkeen voi esittää rotaatioyhtälöllä. Tekemällä yksinkertaistuksia, muun muassa aallokkoa ja tuulta ei oteta huomioon eikä airon lipeämistä vedessä, saadaan soudulle matemaattinen malli. Sillä voi arvioida muun muassa vetojen pituuden ja lukumäärän sekä vedon ja airon palautuksen kestojen suhteen eli syklin rytmin vaikutuksen matkanopeuteen ja energian tarpeeseen.

Soutajien yhteinen lihasvoima ja fyysinen kunto ratkaisevat kirkkoveneen maksimimatkavauhdin. Lihasvoima välittyy airon avulla venettä eteenpäin vieväksi voimaksi. Veneen liikevastus riippuu veneen muodosta, uintisyvyydestä, aallokosta ja tuulesta.

Kokeneilla soutajilla on kyllä käytännön tietämys soututavan vaikutuksesta veneen nopeuteen ja soudun raskauteen, mutta matemaattisia tarkasteluja ei ole juurikaan harrastettu.

Esimerkiksi Espoon soutajilla on kirkkovene, jossa on 14 soutajaa eli 7 soutuparia ja perämies. Veneen miehistö on lähinnä senioriharrastajia, jotka soutelevat liikunnakseen, eivät vakavasti kilpaillakseen. Soutuvauhti harjoituksissa on noin 8–10 km tunnissa. Johdetun mallin avulla tarkastellaan erilaisten soututyöliien vaikutusta matkanopeuteen ja energian tarpeeseen. Arvioidaan myös yhden seniorisoutajan jaksamista harjoitusvauhdissa 10 km tunnissa.

¹ Vastuullinen kirjoittaja: matti.ranta@aalto.fi

Airon rotaatioyhtälö

Kirkkoveineissä on kiinteähankaiset aivot. Aivo on kiinni veneen laidassa olevassa hankatapissa. Soutajan vetäessä airon kädensijasta aivo toimii kuin vipu. Oletetaan, että airon lapa ei lipeä vedessä, vaan vene siirtyy soutajan vedon voiman vaikutuksesta eteenpäin. Airon liikettä voidaan kuvata rotaatioyhtälöllä. Merkitään seuraavasti:

- Soutajan kädensijan etäisyys hankatapista (lyhyt vipuvarsi) on R .
- Soutajan voima on F .
- Airon lavan keskiön etäisyys hankatapista (pitkä vipuvarsi) on r .
- Airon lavan pinta-ala on a ja vastuskerroin on C_d .
- Airon hitausmomentti hankatapin ympäri on J .
- Airon kulma veneen kulkusuunnan normaalin eli tappilinjan kanssa on φ .
- Oletetaan, että aivo ei liiku veteen nähden, mutta vene liikkuu eteenpäin vauhdilla v .
- Veden tiheys on ρ_v .
- Soudun syklin kesto on vetovaiheen kesto t_v vedessä ja airon palautusvaiheen kesto t_p ilmassa yhteenlaskettuna.

Jos suureen derivaattaa ajan suhteen merkitään pisteellä, saadaan vedossa airon rotaatioyhtälöksi

$$J\ddot{\varphi} + rc_d a \frac{1}{2} \rho_v (r\dot{\varphi} - v \cos \varphi)^2 = F_v R \cos \varphi. \quad (1)$$

Verrattuna soutavaan voimaan F_v vedossa huopaava voima airon palautuksessa ilmassa on niin pieni, että se voidaan jättää likimääräisessä liiketarkastelussa huomiotta. Jos airon kulmanopeus on vakio, yhtälön ensimmäinen termi on nolla.

Veneen liikeyhtälö sekä veden ja ilman vastus

Veneen paino miehistöineen on M . Veneen vedessä oleva ns. märkä otsapinta-ala on A ja vastuskerroin C_D . Jos veneessä on N airoa ja soutajaa, kuuluu veneen liikeyhtälö

$$M\dot{v} + C_D A \frac{1}{2} \rho_v v^2 = N c_d a \frac{1}{2} \rho_v (r\dot{\varphi} - v \cos \varphi)^2 \cos \varphi. \quad (2)$$

Yhtälön vasemmalla puolella on soutuenergiaa kuluttavat tekijät eli veneen kiihtyvyys ja veneen liikevastus vedessä. Oikealla puolella on liikettä ylläpitävä voima eli propulsio, joka saadaan rotaatioyhtälöstä. Jos veneen nopeus on vakio, yhtälön ensimmäinen termi on nolla.

Ilmanvastuksen osuus tuulettomissa olosuhteissa on alle 10% kokonaisvastuksesta. Ilmanvastus jätetään ottamatta huomioon.

Yhtälösystemin ratkaiseminen

Yhtälöt (1) ja (2) muodostavat epälineaarisen yhtälösystemin lähinnä propulsion airotérmin $c_d a \frac{1}{2} \rho_v (r\dot{\varphi} - v \sin \varphi)^2$ kautta. Tällöin vain numeerinen ratkaisu on mahdolli-

nen. Tästä syystä pyritään likimääräiseen analyttiseen ratkaisuun keskiarvoistamalla airotermi.

Tarkastellaan kuvitteellista tilannetta, jossa vene kulkee koko syklin kuvitteellisella vakiovauhdilla u . Tämä oletus on likiarvoistus, koska todellisuudessa soudettaessa vakio matkavauhdilla nopeuden täytyy vetovaiheessa nousta, jotta systeemissä olisi ylimääräistä liike-energiaa myös airon palautusvaihetta varten. Palautusvaiheessa ei systeemiin tule energiaa, mutta energiaa kuluu liikevastukseen. Asetetaan vastus koko syklin aikana ja vetovaiheen propulsio yhtä suuriksi. Lisäksi $\dot{\phi} = \text{vakio } \omega$ ja $\langle \cos \phi \rangle$ on $\cos \phi$:n keskiarvo vedon aikana.

$$\underbrace{\eta C_D A \frac{1}{2} \rho_v u^2}_{\text{koko syklin ajan } (t_v + t_p)} = \underbrace{N c_d a \frac{1}{2} \rho_v (r\omega - u \langle \cos \phi \rangle)^2 \langle \cos \phi \rangle}_{\text{vain vetovaiheen ajan } (t_v)}. \quad (3)$$

Koska vetovaiheessa täytyy lisätä liike-energiaa palautusvaihetta varten, tulee propulsiota korottaa tekijällä $\eta = (t_v + t_p)/t_v$, jossa esiintyvät veto- ja palautusvaiheiden kestot. Yhtälön (3) analyttiseksi ratkaisuksi saadaan

$$\frac{r\omega}{u} = \langle \cos \phi \rangle + \sqrt{\frac{t_v + t_p}{t_v} \cdot \frac{C_D A}{N c_d a \langle \cos \phi \rangle}}. \quad (4)$$

Tämä yhtälö antaa veneen fiktiivisen nopeuden ja airon kulmanopeuden välisen riippuvuuden palautusvaiheen ja vetovaiheen kestojen suhteesta t_p/t_v sekä keskiarvoistetusta airokulmasta ja veneen ominaisuuksista.

Vedon pituuden ja syklien lukumäärän välinen riippuvuus

Kun on päätetty, mihin matkavauhtiin u tähdätään, saadaan kaavasta (4) ratkaistua tarvittava kulmanopeus ω . Vedon pituus ϕ on toisaalta $\phi = t_v \omega$. Palautuksen kesto on t , jolloin syklin kesto on $T_{\text{sykli}} = t_v + t_p$. Tällöin saadaan syklin kestoksi

$$T_{\text{sykli}} = \left(\frac{t_v + t_p}{t_v} \right) \frac{\phi}{\omega} = \left(\frac{t_v + t_p}{t_v} \right) \phi \frac{r}{u} \left(\langle \cos \phi \rangle + \sqrt{\frac{t_v + t_p}{t_v} \cdot \frac{C_D A}{N c_d a \langle \cos \phi \rangle}} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Soudun tahti n ilmoitetaan tavallisesti sykleinä minuutissa eli $n = 60/s T_{\text{sykli}}$.

Esimerkkivene

Johdettua soutuomallia, yhtälöä (4), sovelletaan Espoon Soutajat ry:n omistamaan 14-airoiseen kirkkoveneeseen. Kaikki numeeriset laskelmat suoritettu lähteen [1, s. 1403] keinoilla.

Veneen lähtöarvot ovat seuraavat: pituus $l = 12$ m, leveys $d = 1,97$ m, syväys $h = 0,5$ m, massa $M = \text{veneen massa} + 14 \text{ soutajan massa} + \text{perämiehen massa} + \text{airojen massa} \approx 1400$ kg. Pohjan muoto on likimäärin kolmio: $\gamma = (d/2)/h = 1,97$.

Kuormitetun veneen muotokerroin ε kertoo, kuinka paljon vene keulan ja perän osalta poikkeaa tasapaksuksi pötköksi Al oletetusta muodosta, jolla on märkä otsapinta-ala A . Vastuskerroin C_D riippuu veneen keulan muodosta ja pinnan karheudesta. Vastuskerroin on ensin arvioitu ja sitten tarkistettu veneen mitattujen soutu tulosten avulla: $\varepsilon = 0,844$, $A \approx M/(\rho_v \varepsilon l) = 0,139 \text{ m}^2$, $C_D = 0,4$. Airon lavan pinta-ala on $a = 0,06 \text{ m}^2$, kun lapa oletetaan suorakaiteen muotoiseksi. Tällöin vastuskertoimen arvo on $c_d = 1,1$. Lavan etäisyys hankatapistasta on $r = 2,15 \text{ m}$ ja kädensijan etäisyys hankatapistasta on $R = 0,80 \text{ m}$.

Soutustrategian valinta

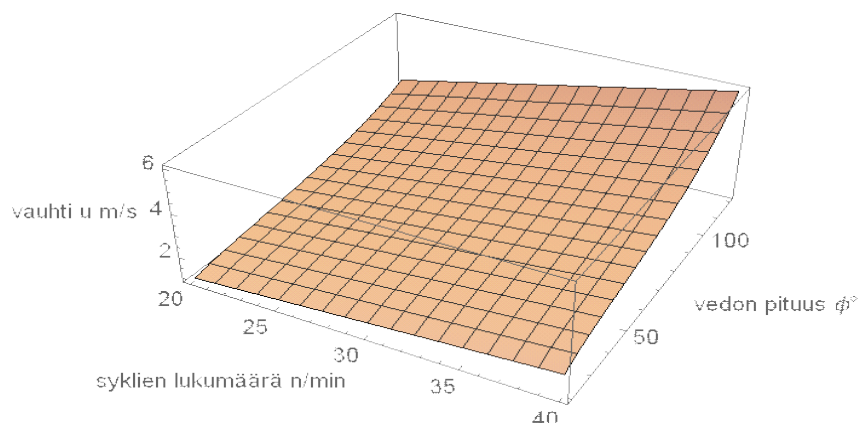
Tässä yhteydessä viittaamme lähteisiin [2–4]. Monisoutuisissa veneissä on tärkeää, että soutu tapahtuu tahdissa ja samassa rytmissä. Perämies ja tahtiaivot hoitavat, että vene kulkee rauhallisesti. Veneen poukkoilu lisää turhaa energiankulutusta. Soudun matkavauhdin määräävät kolme tekijää:

- vetojen lukumäärä n minuutissa, syklin kesto
- vedon pituus
- syklin rytmi eli vedon ja palautuksen keston suhde.

Usein herää kysymys, kannattaako vauhdin parantamiseksi tihentää vetoa eli lisätä vetojen lukumäärää aikayksikössä vai pidentää vetoa eli suurentaa airon alku- ja loppuasennon kulmaväliä. Kaavasta (4) keskiarvoistaen johdetun kaavan

$$u = \frac{n}{60} \left(\frac{t_v + t_p}{t_p} \right) \phi r \left/ \left(\langle \cos(\phi/2) \rangle + \sqrt{\left(\frac{t_v + t_p}{t_p} \right) \frac{C_D A}{N c_d a \langle \cos(\phi/2) \rangle}} \right) \right. \quad (7)$$

avulla laskettu kuva 1 valaisee asiaa, kun $t_v/t_p = 1:1$. Kuvasta nähdään, että vauhdin kasvattamiseksi vedon pidentäminen eli airon kulmavälin suurentaminen on tehokkaampi keino kuin syklien lukumäärän lisääminen. Tämä edellyttää, että soutajilla on voimaa kovempaa vetoa varten.



Kuva 1. Vauhdin riippuvuus syklien lukumäärästä n ja vedon pituudesta ϕ .

Laskentatuloksia

Taulukossa 1 yhtälöstä (4) on laskettu likiarvoja esimerkkiveneelle. Suureen $\langle \cos \varphi \rangle$ arvona on käytetty airon kulmasektorin keskikohdan $\cos \varphi$ -arvoa. Kulmasektorit ovat vedon alkupisteen ja tappilinjan välinen kulma ja tappilinjan ja airon ylösnostokohdan välinen kulma. Sektorikulmat ilmoitetaan positiivisina, jotta yhteen laskemalla saadaan airon kiertämä matka vedossa. t -termien suhde eli rytmivaihtelu on vedon kestojen suhde airon palautusaikaan syklissä.

Taulukko 1. Vauhdin, airon kulmavälin ja souturytmin vaikutus esimerkkiveneen soutuarvoihin.

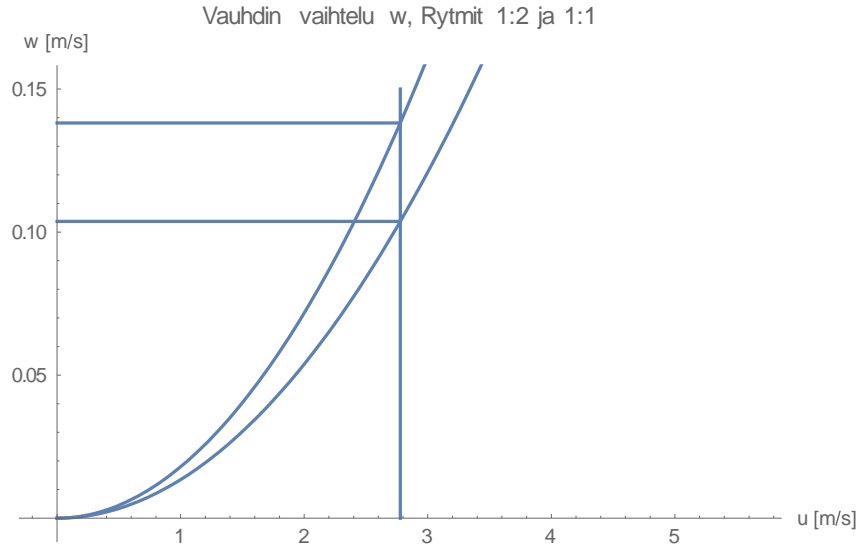
vauhti 10km/h		m/s	s	1/min	N	W	W	1/h	kJ
airokulma	$t_v : t_p$	$r\omega_{veto}$	T_{sykli}	n	$F_{vkäsi}$	$teho_v$	$teho_{sykli}$	$syklit$	$työ_{tunissa}$
45° + 45°	1:1	3,4	2	30	98	121	61	1800	111
	1:2	3,7	2,7	22	147	201	67	1300	89
45° + 30°	1:1	3,5	1,6	38	94	122	63	2250	142
	1:1,4	3,6	1,9	32	115	154	64	1900	121
	1:2	3,75	2,3	27	141	196	65	1600	102
32,5° + 32,5°	1:1	3,6	1,4	44	90	120	60	2650	159
	1:2	3,8	1,9	31	126	193	64	1900	120
vauhti 9km/h									
45° + 30°	1:1,4	3,2	2,1	29	90	108	45	1700	77

Veneen vauhdin vaihtelu syklin aikana matkavauhdin funktiona

Syklin aikana veneen vauhti vaihtelee välillä $u \pm w$, jossa u on toivottu matkavauhti ja w vauhdin vaihtelu. Vauhdin on noustava vetovaiheen loppua kohti, jotta veneellä olisi liike-energiaa airojen palautusvaihetta varten. Palautusvaiheen aikana nopeus laskee liikevastuksen takia. Lisänopeus w saadaan laskettua liikeyhtälöstä. Mitä pidempi on airon palautusvaiheen kesto verrattuna vetovaiheen kesto, sitä suurempi on vauhdin vaihtelun w oltava syklin aikana. Tätä on havainnollistettu kuvassa 2.

Jaksaako soutaja?

Viittaamme tässä yhteydessä lähteisiin [3, 4]. Soutu ei ole ihmisen luontainen liikku- miskuoto. Periaatteessa se on melko yksinkertainen liikesuoritus. Mutta kilpaurheiluna se on fyysisesti erittäin raskas ja teknisesti vaativa laji. Soutajalta vaaditaan voimaa airon vetovaiheessa ja tehoa matkavauhdin ylläpitämiseksi. Erityisesti jalkojen työ on vaativaa, mutta myös ylävartalon lihakset ovat tärkeitä kokonaisvauhdin kan- nalta. Energian käyttö juoksussa ja soudussa on hiukan erilaista, joten juoksutulosten soveltaminen soutuun on likimääräistys, mutta käyttökelpoinen tapa kuitenkin.



Kuva 2. Esimerkkiveneen kulun tasaisuus eri souturytmeillä, kun $u = 10$ km/h.

Viittaamme tässä yhteydessä lähteisiin [5, 6]. Tarkastellaan Espoon Soutajien naispuolisen seniorisoutajan jaksamista. Jaksaaako hän soutaa tunnin ajan kirkkovenettä matkavauhdilla 9–10 km/h? Tämä on tavoite Espoon Soutajien soutuharjoituksissa. Tarkastelu on likimääräinen, siinä ei huomioida tuulta eikä aaltoja. Veneen oletetaan kulkevan rauhallisesti ilman häiritsevää poukkoilua pysty- tai sivusuunnassa.

Soutajan (toinen kirjoittajista) fysiologiset arvot on laskettu hänen juoksutuloksistaan: keskimääräinen hapenottokyky on $\sigma = 0,521$ W/kg; perushappivarasto veressä on $e_0 = 44,72$ J/kg.

Soutajan energiayhtälö, jossa e on käytettävissä oleva soutuenergia, voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{de}{dt} = \sigma - \frac{\text{lihasteho [W]}}{\text{soutajan massa [kg]}}. \quad (7)$$

Integroidaan yhtälö (7) yli soutuajan:

$$e(T) = e_0 + \sigma T - \frac{\text{lihastyö [J]}}{\text{soutajan massa [kg]}}. \quad (8)$$

Soutaja väsähtää, jos happivarasto veressä on kulutettu loppuun eli $e = 0$. Soutajan tuottama maksimi energia tunnin aikana on yhtälön (8) mukaan

$$\text{soutajan massa } (e_0 + \sigma 3600) = 118000 \text{ [J]}. \quad (9)$$

Verrataan tätä arvoa taulukossa (1) esitettyyn soutuun, jossa airokulma on $45^\circ + 35^\circ$ ja $t_v; t_p = 1:1,4$. Vaadittu kokonaisenergiataso tunnin soudussa on 121 000 J eli soutaja ei jaksaa soutaa loppuun asti.

Soutaja voi kyllä helpottaa tilannettaan soutamalla hiukan kevyemmin kuin muut. Hän ei laita airoa kokonaan veteen. Veneen keskellä soutavat vahvemmat soutajat

joutuvat tällöin soutamaan hiukan voimakkaammin, jotta toivottu matkavauhti säilyisi. Sen sijaan nopeudella 9 km/h soutaja jaksaa soutaa koko matkan.

Valittu vertailusoututyylili on soutajalle mieluisa ja mahdollinen. Airon kulma $45^\circ + 45^\circ$ olisi kokonaistehon tarpeen kannalta edullinen, mutta varsinkin seniorisoutajat ovat jäykkiä selästään eikä pitkä veto välttämättä onnistu heiltä. Koko ryhmän on soudettava samalla tyylillä. Rytmi 1:2 olisi myös edullinen, mutta vedossa tarvittaisiin paljon voimaa eivätkä kaikki jaksaa tällaista soututyyliliä. Rytmi 1:1 tai vielä nopeampi rytmi on monelle mieluisa, mutta se voi olla hengitykselle liian nopea: menee huohotukseksi. Nopeassa rytmissä vene voi myös helposti ryhtyä pomppiin.

Loppupäätelmiä

Syklien lukumäärän minuutissa määrittäminen laskemalla antaa kohtuullisen hyvän arvon suuruusluokasta. Laskennallinen tarkastelu osoittaa, että vauhdin kasvattamiseksi airokulman lisääminen on energiatehokkaampi keino kuin syklien lisääminen. Moderneissa veneissä on liukupenkit, jotka mahdollistavat tehokkaan jalkatyöskentelyn. Tällöin on mahdollista kasvattaa airokulmaa, mikä parantaa vauhtia. Esitetty soutu on yksinkertaistettu, mutta periaatteessa melko totuudenmukainen. Se, miten soutaja jakaa voimankäytön eri vartalon osien välillä, on henkilökohtaista. Suuria jalkalihaksia ja laajaa liikerataa kannattaa suosia.

Viitteet

- [1] Stephen Wolfram, *The Mathematica Book*, Third Edition, Wolfram Media, Cambridge University Press, 1996.
- [2] Soututekniikka, <http://www.smark.fi/tiedostot/SOUTUTEKNIikka.pdf>
- [3] Stephens, Soudun fysiikka ja fysiologia. Soudun nopeammin. VETO <http://www.smark.fi/tiedostot/Stephens.pdf>
- [4] Olli Pekka Nuuttila ja Janne Hautala. Olympiasoudun lajiansalyysi ja valmennuksen ohjelmointi. Valmennus- ja testausoppi. Valmentajaseminaari. LBIA028. Liikuntabiologia. Jyväskylän Yliopisto, 2017. <https://jyx.jyu.fi/bitstream/handle/123456789/55430/Nuuttila%20Olli-Pekka%20ja%20Hautala%20Janne.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [5] Matti A. Ranta ja Laila Hosia. Kuntoilijan juoksumalli, *Rakenteiden Mekaanikka*, vol. 42, nro 2, s. 61–74, 2009. http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2009/nro2/RakMek_42_2_2009_1.pdf
- [6] Markku Jokisipilä. Soudun lajiansalyysi. Suomen Soutuliitto, 2005.

Matti A Ranta

Aalto-yliopisto, Perustieteiden korkeakoulu, Matematiikan ja systeemianalyysin laitos
PL 1100, 02015 Espoo
matti.ranta@aalto.fi

Laila Hosia

Espoon Soutajat ry
Nallenpolku 2 C 38, 02110 Espoo
laila.hosia@gmail.com