Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)
vol. 53, nro. 2, 2020, s. 42–52
http://rakenteidenmekaniikka.journal.fi/index
https://doi.org/10.23998/rm.82681

VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

Lisähuomioita energiataseiden käytöstä virtauslaskennassa

Eero-Matti Salonen[1] ja Rauno Holopainen

Tiivistelmä Artikkeli on täydennys tämän lehden aikaisempaan energiataseiden käyttöä koskevaan artikkeliin [1]. Mekaanisen energian taseen periaatteessa kokoonpuristuvassa virtauksessa esiintyvä niin sanottu kokoonpuristumistermi otetaan mukaan tarkasteluun. Eräs havainnollistava esimerkkitapaus käydään yksityiskohtaisesti läpi. Lisäksi esitetään kritiikkiä virtauslaskennan esityksissä ilmeneviin epätäsmällisyyksiin, joita saattaa esiintyä energiatarkastelujen yhteydessä.

Avainsanat: putkivirtauslaskenta, energiataseet, kokoonpuristumistermi

Vastaanotettu: 26.6.2017. Hyväksytty: 5.2.2019. Julkaistu verkossa: 30.3.2020.

emeritusprofessori Tapio Salmen muistolle

Johdanto

Tämän lehden artikkelissa [1] on käsitelty energiataseiden soveltamista virtaus-laskennassa ja erityisesti kanavistovirtauksissa. Kyseisessä artikkelissa kuvattiin varsinaisen energian taseen periaatteen ja mekaanisen energian taseen periaatteen saamia makroskooppisia muotoja ja niiden samankaltaisuuksia, mutta myös tärkeitä eroja kuitenkin ilman varsinaisia esimerkkilaskelmia. Erityisesti pyrittiin korostamaan mekaanisen energian taseen periaatteen usein liian vähälle jäävää asemaa. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on täydentää artikkelia [1] muun muassa käymällä yksityiskohtaisesti läpi eräs havainnollistava esimerkkilaskelma. Tämän yhteydessä joudutaan ottamaan huomioon myös niin sanotun kokoonpuristumistermin osuus, joka jätettiin käsittelemättä artikkelissa [1]. Lisäksi esitetään kritiikkiä virtauslaskennan kirjallisuudessa joissain esityksissä energiatarkasteluiden yhteydessä ilmeneviin epätäsmällisyyksiin.

[1] Vastuullinen kirjoittaja: eeromatti.salonen@gmail.com

Perusyhtälöt

Artikkelissa [1] tarkasteltiin energian taseen periaatteiden virtauslaskennassa saamia versioita. Toistetaan vielä käytetyt periaatteet.

Energian taseen periaate eli termodynamiikan ensimmäinen pääsääntö on tehomuotoisena

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{Q}} = \frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} + \frac{\mathrm{D}E}{\mathrm{D}t} \tag{1}$$

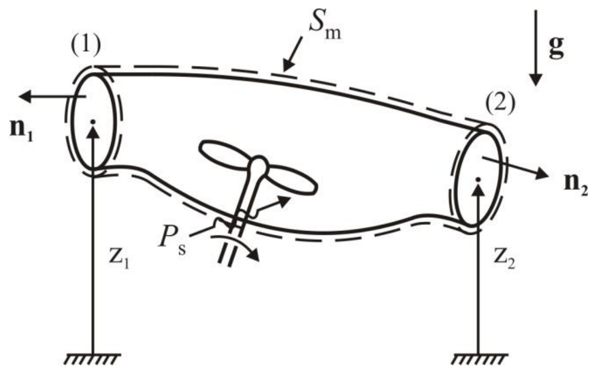
eli kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho P_{ext} plus kappaleen saama lämpöteho P_{Q} on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian K plus kappaleen sisäenergian E muutosnopeus.

Mekaanisen energian taseen periaate on tehomuotoisena

$$P_{\text{ext}} + P_{\text{int}} = \frac{\mathrm{D}K}{\mathrm{D}t} \tag{2}$$

eli kappaleeseen vaikuttavien ulkoisten voimien teho P_{ext} plus kappaleeseen vaikuttavien sisäisten voimien teho P_{int} on yhtä suuri kuin kappaleen liike-energian K muutosnopeus.

Artikkelissa tarkasteltiin erityisesti kuvan 1 mukaista yksidimensioista kontrollialuetta.



Kuva 1. Kaksiaukkoinen kontrollitilavuus.

Artikkelissa esitettyjen tavanomaisten otaksumien (tärkein niistä on pysyvän virtauksen otaksuma) jälkeen saatiin vastaavasti versiot (energian tase):

$$Q_1\left[p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2}\rho_1 \langle v_e \rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 + \rho_1 e_1 \right] - Q_2\left[p_2 + \alpha_2 \frac{1}{2}\rho_2 \langle v_e \rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 + \rho_2 e_2 \right] = -P_{\text{Q}} - P_{\text{s}} \tag{3}$$

ja (mekaanisen energian tase):

$$Q_1\left[p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2}\rho_1 \langle v_e \rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 \right] - Q_2\left[p_2 + \alpha_2 \frac{1}{2}\rho_2 \langle v_e \rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 \right] = D - \int_V p d_{ii}\,\mathrm{d}V - P_{\text{s}} \tag{4}$$

Käytettyjen merkintöjen sisältö on esitetty yksityiskohtaisesti artikkelissa [1]. Eräät termit tulevat kuitenkin selostetuksi myös tässä jatkossa tapahtuvien käsittelyjen yhteydessä. Etenkin yhtälössä (4) on nähtävissä niin sanotun "yleistetyn Bernoullin yhtälön" painetermi, liike-energia- eli nopeustermi ja korkeusasematermi. Yhtälöiden (3) ja (4) vertailu antaa yhteyden

$$D-\int_V pd_{ii} = -Q_1\rho_1 e_1 + Q_2\rho_2 e_2 - P_{\mathrm{Q}} \tag{5}$$

eli

$$D = w(e_2 - e_1) - P_{\mathrm{Q}} + \int_V pd_{ii} \,. \tag{6}$$

Tässä on käytetty hyväksi tietoa massavirran w vakioarvosta eli $w = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$. Artikkelissa [1] ei käsitelty yhtälön (6) oikean puolen viimeisen termin — niin sanottu *kokoonpuristumistermi* (engl. compression term) tai dilataatiotermi — kanavisto-tyyppisessä virtauksessa saamaa arvoa. Se on esitetty nyt tämän artikkelin liitteessä ja sitä tullaan tarvitsemaan jatkossa käsiteltävän esimerkkitapauksen yhteydessä. Erityisesti otaksumalla kokoonpuristumaton virtaus dilataationopeus $d_{ii} = 0$ ja yhtälö (6) saa yksinkertaisemman muodon

$$D = w(e_2 - e_1) - P_{\mathrm{Q}} \,. \tag{7}$$

Yhtälöt (6) ja (7) ovat tärkeitä verrattaessa mekaanisen energian taseen periaatteen antaman niin sanotun *dissipaatiotermin* (engl. dissipation term) eli *häviötermin* (engl. loss term) eli *vastustermin* (resistance term) eli *kitkatermin* (friction term) D yhtälöiden oikeilla puolilla esiintyviin varsinaisen energian taseen periaatteen antamiin vastineisiin, jotka koostuvat sisäenergian ja lämmön vuotermeistä. Todettakoon, että niin sanottuihin "häviöihin" liittyvä terminologia — kuten yllä — voi olla alan kirjallisuudessa melko vaihtelevaa, etenkin koska oleelliset yhtälöt (3) ja (4) saadaan myös vaihtoehtoisiin muotoihin esimerkiksi jakamalla puolittain tilavuusvirralla Q_1. Tällöin yhtälöiden termeillä on paineen dimensio ja puhutaankin muun muassa *painehäviöistä* (engl. pressure losses).

Esimerkkitapaus

Tehtävän kuvaus

Geometria on kuvan 1 tapauksen pelkistetty versio, kuva 2. Kyseessä on pystysuorassa asemassa oleva suora (pituus L) vakioympyräpoikkileikkauksen (halkaisija d ja poikkileikkauspinta-ala siis $A = \pi d^2/4$) omaava kanavaosuus. Akselitehoa ei ole mukana eli termi $P_{\mathrm{s}} = 0$. Kanavaosuuden pituuskoordinaatti x on suunnattu alemmasta poikkileikkauksesta 1 ylempään poikkileikkaukseen 2. Väliaineena on ilma, jossa kosteuden mahdolliset muutokset jätetään tässä huomiotta. Erityisesti nyt halutaan tarkastella myös kokoonpuristuvaa virtausta, jolloin käsittely mutkistuu huomattavasti verrattuna kokoonpuristumattomaan tapaukseen.

Ideaalikaasulain mukaisesti tiheys

$$\rho = \frac{p}{RT} , \tag{8}$$

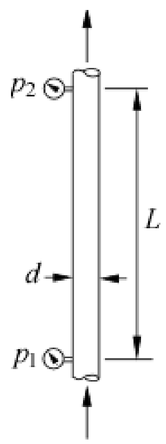
jossa R on ilman kaasuvakio ja T absoluuttinen lämpötila. Viskositeetti μ otaksutaan tässä vakioksi ja sen arvo voidaan laskea esimerkiksi Sutherlandin kaavasta. Ominaisentalpialle h otetaan tavanomaiseen tapaan riippuvuus

$$h \equiv e + \frac{p}{\rho} = c_p T , \tag{9}$$

jossa lämpökapasiteetti c_p otaksutaan vakioksi. Todellisuudessa viskositeetti ja lämpökapasiteetti riippuvat tietenkin lämpötilasta, mutta käsittelyn yksin-kertaistamiseksi tämä jätetään huomiotta.

Kuten edellä tarkastellaan pysyvää virtausta. Virtausta kuvaaviksi perussuureiksi otetaan paine $p(x)$, tilavuusvirta $Q(x) = \langle v_e(x) \rangle A$ ja poikkileikkauksen niin sanottu keskilämpötila $T(x)$ lähteen [2, s. 383] mukaisesti.

Ajatellaan, että kyseinen kanavisto-osuus on osa yleisempää kanavistoa. Paine p_1, tilavuusvirta Q_1 ja lämpötila T_1 poikkileikkauksessa 1 ajatellaan tunnetuiksi. Tehtävänä on määrittää vastaavat arvot p_2, Q_2 ja T_2 poikkileikkauksessa 2. Kuitenkin aluksi esitetään niin sanottu isoterminen (kokoonpuristumaton) tapaus, jossa p_1 ja Q_1 otaksutaan tunnetuiksi ja on määritettävä vain p_2 ja Q_2.



Kuva 2. Kanavaosuus.

Isoterminen tapaus

Kahden tuntemattoman suureen p_2 ja Q_2 määrittämiseksi tarvitaan kaksi yhtälöä. Isotermisessä formulaatiossa erityisesti mahdollinen lämpötilan muutoksen vaikutus jätetään huomiotta ja tiheyden $\rho_1 = \rho$ otaksutaan olevan vakio. Kaksi tarvittavaa yhtälöä ovat massan säilymisen periaate ja mekaanisen energian taseen periaate.

Ensimmäinen yhtälö. Massatase antaa yhtälön

$$\rho Q_1 = \rho Q_2 \tag{10}$$

eli tilavuusvirta poikkileikkauksissa 1 ja 2 on sama:

$$Q_2 = Q_1 \equiv Q\ . \tag{11}$$

Toinen yhtälö. Edellisen perusteella saadaan keskinopeuksiksi

$$\langle v_e \rangle_1 = \frac{Q_1}{A_1} = \frac{Q}{A}, \quad \langle v_e \rangle_2 = \frac{Q_2}{A_2} = \frac{Q}{A} \tag{12}$$

eli myös $\langle v_e \rangle_2 = \langle v_e \rangle_1$. Kun otaksutaan lisäksi, että liike-energian korjaustekijät ovat yhtäsuuret ($\alpha_1 = \alpha_2$), liike-energiatermit häviävät yhtälössä (4) ja päädytään yhtälöön

$$\Delta p + \rho g\left(z_1 - z_2\right) = \frac{D}{Q} \tag{13}$$

jossa $\Delta p = p_1 - p_2$. Täten Δp ja toinen tuntematon p_2 voidaan määrittää suoraan yhtälöstä (13). Tarvitaan kuitenkin arvio häviötermistä *D*. Käytetään tunnettua muotoa

$$D = f\,\frac{L}{d}\,\frac{1}{2}\rho\left(\frac{Q}{A}\right)^2 Q \tag{14}$$

jossa niin sanotun *kitkatekijän* (engl. friction factor) *f* lauseke on ([3])

$$f = \frac{0.25}{\left[\log\left(\frac{\varepsilon}{3.7d} + \frac{5.74}{\mathrm{Re}^{0.9}}\right)\right]^2}\,. \tag{15}$$

Tässä ε on kanaviston pinnankarheus (engl. roughness height) ja Re Reynoldsin luku:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho d}{\mu}\left(\frac{Q}{A}\right). \tag{16}$$

Yksityiskohtainen jatkokäsittely seuraa myöhemmin numeroarvojen yhteydessä.

Lämpötilariippuva tapaus

Nyt on siis lisäksi tarpeen myös varsinaisen energian taseen periaatteen käyttö.

Ensimmäinen yhtälö. Massatase antaa ensin yhteyden

$$\rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2 = w\,. \tag{17}$$

Konstitutiivista yhteyttä (8) soveltamalla saadaan sitten

$$Q_2 = \frac{\rho_1}{\rho_2} Q_1 = \frac{p_1 T_2}{p_2 T_1} Q_1\,. \tag{18}$$

Toinen yhtälö. Mekaanisen energian taseen periaatteessa (4) täytyy ottaa huomioon kokoonpuristumistermin antama osuus. Käyttämällä liitteen kaavaa (L.2) eräiden termien nähdään kumoavan toisensa ja saadaan seuraavaksi

$$Q_1\left[\alpha_1 \frac{1}{2}\rho_1 \langle v\rangle_1^2 + \rho_1 g z_1\right] - Q_2\left[\alpha_2 \frac{1}{2}\rho_2 \langle v\rangle_2^2 + \rho_2 g z_2\right] = D + \int_0^L Q \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x - P_\mathrm{s}\,. \tag{19}$$

Kun tämä jaetaan vielä puolittain massavirralla $w = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$ ja otetaan huomioon liitteen kaava (L.5) saadaan muoto

$$\frac{Q_\mathrm{m}}{w} p_1 + \alpha_1 \frac{1}{2}\langle v\rangle_1^2 + g z_1 - \frac{Q_\mathrm{m}}{w} p_2 - \alpha_2 \frac{1}{2}\langle v\rangle_2^2 - g z_2 = \frac{D}{w} - \frac{P_\mathrm{s}}{w} \tag{20}$$

Lopuksi tehdään vielä otaksuma $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$ (tässä lisäksi $P_\mathrm{s} = 0$). Saadaan yhtälö

$$\frac{Q_\mathrm{m}}{w}\Delta p + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{A}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{Q_2}{A}\right)^2 + g\left(z_1 - z_2\right) = \frac{D}{w}\,, \tag{21}$$

jossa edelleen $\Delta p = p_1 - p_2$. Häviötermi D lasketaan kaavasta (14) käyttäen keskimääräisiä arvoja $\rho_\mathrm{m} = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ja $Q_\mathrm{m} = (Q_1 + Q_2)/2$.

Kolmas yhtälö. Ottamalla huomioon ominaisentalpian lauseke (9) varsinainen energiayhtälö (3) saa ensin muodon

$$Q_1\left[\alpha_1 \frac{1}{2}\rho_1 \langle v\rangle_1^2 + \rho_1 g z_1 + \rho_1 c_p T_1\right] - Q_2\left[\alpha_2 \frac{1}{2}\rho_2 \langle v\rangle_2^2 + \rho_2 g z_2 + \rho_2 c_p T_2\right] = -P_\mathrm{Q} - P_\mathrm{s} \tag{22}$$

Kun tämä jaetaan vielä puolittain massavirralla w ja tehdään jälleen otaksuma $\alpha_1 = \alpha_2 \approx 1$ (tässä edelleen $P_\mathrm{s} = 0$), saadaan muoto

$$c_p\,\Delta T + \frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{A}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{Q_2}{A}\right)^2 + g\left(z_1 - z_2\right) = -\frac{P_\mathrm{Q}}{w}\,, \tag{23}$$

jossa $\Delta T = T_1 - T_2$. Systeemin saama lämpövirta P_Q tulee esittää jollain tavalla. Tässä otaksutaan, että kanaviston seinämällä on annettu vakiolämpötila T_s ja että lämmönsiirtokertoimella h (tässä eri suure kuin ominaisentalpia) on annettu vakioarvo. Lämpövuo (määriteltynä positiivisena ulos kontrollialueesta) on siis $q_n = h(T - T_s)$ ja ottaen huomioon poikkileikkauksen piirin arvo $P = \pi d$, systeemin saama lämpövirta on (poikkileikkausten läpi tapahtuva lämpövuo jätetään tavanomaiseen tapaan huomiotta) [2, s. 397]

$$P_{\mathrm{Q}} = hPL\,\Delta T_{\mathrm{lm}}\,, \tag{24}$$

jossa niin sanottu logaritminen keskilämpötilaero (engl. log mean temperature difference) on merkintöjämme käyttäen

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = \frac{\left(T_{\mathrm{s}} - T_2\right) - \left(T_{\mathrm{s}} - T_1\right)}{\ln\left[\left(T_{\mathrm{s}} - T_2\right)/\left(T_{\mathrm{s}} - T_1\right)\right]}\,. \tag{25}$$

Yhtälöt (18), (21) ja (23) ratkaistaan suureiden Q_2, Δp (tai p_2) ja ΔT (tai T_2) suhteen. Ratkaisu vaatii iteraatiota. Käytetään laskentajärjestystä (23), (18), (21).

Numeerinen sovellus

Otetaan arvot

$$\begin{aligned}
&L = 4\,\mathrm{m}, \quad d = 0.2\,\mathrm{m}, \quad z_2 - z_1 = 4\,\mathrm{m}, \quad g = 9.81\,\mathrm{m/s^2},\\
&\rho_1 = 1.20\,\mathrm{kg/m^3}, \quad p_1 = 101300\,\mathrm{Pa}, \quad T_1 = \left(273.15 + 20\right)\mathrm{K},\\
&c_p = 1005\,\mathrm{J/(kg\cdot K)}, \quad \mu = 0.000\,0185\,\mathrm{kg/(m\cdot s)},\\
&Q_1 = 0.1\,\mathrm{m^3/s}, \quad \varepsilon = 0.000\,09\,\mathrm{m}, \quad T_{\mathrm{s}} = (273.15 + 50)\,\mathrm{K}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Isotermisessä tapauksessa paine-eroksi saadaan

$$\Delta p = 50\,\mathrm{Pa}\,. \tag{27}$$

Tilavuusvirta-arvo $Q_2 = 0.1\mathrm{m^3/s}$ on tietenkin tässä itsestään selvä tulos. Paine-ero Δp johtuu lähinnä painovoiman osuudesta ja dissipaatio-osuus D/Q on vain noin 6% termistä $\rho g(z_1 - z_2)$ yhtälössä (13).

Lämpötilariippuvassa tapauksessa lämmönsiirtokertoimen arvon määrittämiseksi on otettu Dittus-Boelterin yhtälön ([2, s. 406]) mukaisesti Nusseltin luvuksi (ilmalle Prandtlin luku $\mathrm{Pr} \approx 0.7$)

$$\mathrm{Nu} = 0.023\,\mathrm{Re}^{4/5}\,\mathrm{Pr}^{1/3} = 0.023\cdot 41292^{4/5}\cdot 0.7^{1/3} = 100.64\,. \tag{28}$$

Tästä saadaan (ilmalle lämmönjohtavuus $k \approx 0.026\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}$) lämmönsiirto-kertoimeksi

$$h = \frac{\mathrm{Nu}\,k}{d} = \frac{100.64\cdot 0.026\,\mathrm{W/(m\cdot K)}}{0.2\,\mathrm{m}} \approx 13\,\mathrm{W/(m^2\cdot K)}\,. \tag{29}$$

Lämpötilariippuvassa tapauksessa iterointi antaa muun muassa logaritmiselle keskilämpötilaerolle arvon

$$\Delta T_{\mathrm{lm}} = 26.28\,\mathrm{K}\,. \tag{30}$$

Samoin lopputuloksina saadaan arvot

$$\Delta p = 49.7\,\mathrm{Pa}, \quad Q_2 = 0.102\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}, \quad \Delta T = -7.13\,\mathrm{K}\,. \tag{31}$$

Kuten nähdään, suhteellisen pienestä syntyneestä lämpötilaerosta $\Delta T = -7.13\,\mathrm{K}$ eli $T_2 - T_1 = 7.13\,\mathrm{K}$ johtuen muutokset verrattuina isotermisen tapauksen tilavuusvirran ja paineen arvoihin ovat tässä erittäin pienet.

Epätäsmällisyyksiä

Energiakäsitteisiin liittyy helposti niiden monimuotoisuuden kuten liike-energia, potentiaalienergia, mekaaninen energia, sisäenergia, kokonaisenergia, lämpöenergia (joka on vältettävä termi) ja niin edespäin johdosta helposti väärinkäsitysten ja väärintulkintojen mahdollisuuksia ei vain arkikielen yhteydessä vaan myös tekniikan sovelluksissa. Seuraavassa esitetään eräs esimerkkitapaus.

Lähteessä [4]: "Handbook of Hydraulic Resistance, 790 s." annetaan suuri määrä tiettyjen virtausteknisten laitteiden osien geometrioihin liittyviä arvioita niin sanotuista häviöistä eli vastuksista (engl. loss, resistance). Seuraavassa on lainaus kirjan sivuilta 22 ja 23:

> "1. According to the law of conservation of energy for the medium moving through a pipe (channel), the energy of the liquid (gas) flow passing through section 0-0 per unit time (see Figure 1-10) is equal to the sum of energies of the liquid (gas) flow passing through section 1-1 per unit time plus the internal (thermal) and mechanical energies dissipated along the segment between these sections.
>
> 2. In the general case of an inelastic (liquid) and elastic (gas) flow with nonuniform transverse velocity and pressure distribution,* the corresponding energy equation will have the form
>
> $$\int_{F_0}\left(p + \frac{\rho w^2}{2} + g\rho z + \rho U\right) w dF = \int_{F_1}\left(p + \frac{\rho w^2}{2} + g\rho z + \rho U\right) w dF + \Delta N_{\mathrm{tot}} \tag{1-21}$$
>
> where z is the geometric height of the centroid of the corresponding section, in m; p is the static pressure (absolute) at the point of the the corresponding section, in Pa, U is the internal specific heat energy of the gas flow (which a frictionless flow would have had), in J/kg; and ΔN_{tot} is the total power lost over the segment between

sections 0-0 and 1-1, which characterizes the value of mechanical energy dissipated into heat, in W.

*Assuming no heat transfer and shaft work over the given segment."

Lainaus loppuu tähän. Kuvaa 1-10 ei ole liitetty tässä mukaan. Merkintöjen suhteen todettakoon vielä, että w esittää tässä aksiaalista virtausnopeutta (engl. stream velocity). Tähdellä merkitty virke on kirjassa alaviitteenä. Tärkeä peruskaava (1-21) esiintyy kirjassa myöhemmin useassa eri muodossa johtuen kulloinkin tehdyistä otaksumista.

Mielestämme kirjan yhtälön (1-21) täytyy olla virheellinen. Kirjan tekstin perusteella on ilmeistä, että kyseessä on tarkoitus olla varsinaisen energiaperiaatteen eli termodynamiikan ensimmäisen pääsäännön sovellus. Tarkastellaan tilannetta yksinkertaisuuden vuoksi erityisesti kokoonpuristumattomassa tapauksessa, jolloin merkintöjämme käyttäen kaavan (7) mukaisesti dissipaatio $D = w(e_2 - e_1) - P_Q$. Yhtälössä (1-21) on jo mukana sisäenergian muutos (termin U kautta) ja alaviitteen mukaisesti lämpötehon otaksutaan häviävän. Täten kaavan (7) oikea puoli esiintyy jo yhtälössä (1-21) *eikä sinne saa enää lisätä ylimääräistä dissipaatiotermiä* ΔN_{tot} .

Esittämämme kritiikki ei poista kirjan tärkeää käytännöllistä arvoa, koska useimmissa sovelluksissa on kuitenkin itse asiassa kyse mekaanisen energian taseen periaatteen käytöstä, koska sisäenergian ja lämmönsiirron osuutta ei ole mukana. Voidaan myös todeta, että lainauksessa esiintyvä teksti "which characterizes the value of mechanical energy dissipated into heat" on nykyterminologian mukaan harhaanjohtava, koska termi "heat" eli lämpö on kappaleen (systeemin) saama tai luovuttama energia. Lainauksen loppu kuuluisi paremmin: "dissipated into internal energy".

Kiitokset

Kiitämme käsikirjoituksen vertaisarvioijia korjausehdotuksista, joiden huomioonotto on mielestämme parantanut artikkelin sisältöä.

Viitteet

[1] Salonen, E-M. ja Holopainen, R. (2014). Makroskooppiset energiataseet virtauslaskennassa, *Rakenteiden Mekaniikka*, vol. 47, nro. 4, s. 127–147. http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2014/nro4/RakMek_47_4_2014_1.pdf

[2] Incroprera F. D. and DeWitt D. P (1981). *Fundamentals of Heat Transfer*, Wiley.

[3] Swamee, P. K. and Jain. A. K. (1976). Explicit Equations for Pipe-Flow Problems, *Journal of Hydraulics Division*, ASCE, Vol. 102, No. HY5, pp. 657–664.

[4] Idelchik, I. E. (2003) *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3rd ed. Jaico.

[5] Bird, R.B., Stewart W.E. and Lightfoot. E.N. (2002). *Transport Phenomena*, 2nd ed. Wiley.

Eero-Matti Salonen
Sibeliuksenkatu 3 B 25, 00250 Helsinki
eeromatti.salonen@gmail.com

Rauno Holopainen
Oulun ammattikorkeakoulu
Kotkantie 1, 90250 Oulu
rauno.holopainen@oamk.fi

Liite

Lähteessä [5] on osoitettu kaavana (7.8-12), että kokoonpuristuvuustermiä voidaan approksimoida muodossa (käyttäen merkintöjämme)

$$-\int_V p d_{ii} \,\mathrm{d}V \approx -w\left[\left.\frac{p}{\rho}\right|_0^L - \int_0^L \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right]. \tag{L.1}$$

Kaavan johdossa on eräänä otaksumana, että virtaukseen voidaan liittää jonkinlainen aksiaalinen "edustava virtaviiva" (engl. representative streamline). Sovellukseemme liittyen tämä otaksuma on voimassa. Ottamalla huomioon massavirran lauseke $w = \rho Q = \rho_1 Q_1 = \rho_2 Q_2$ kaava (L.1) on vaihtoehtoisesti

$$-\int_V p d_{ii} \,\mathrm{d}V \approx -p_2 Q_2 + p_1 Q_1 + \int_0^L Q \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x. \tag{L.2}$$

Tässä otaksutaan edelleen (ei enää lähteen [5] otaksuma), että esiintyvän integraalin määrittämisessä suureita p ja Q voidaan approksimoida lineaarisesti aksiaalisen pituuskoordinaatin x suhteen:

$$p(x) \approx \left(1 - \frac{x}{L}\right) p_1 + \frac{x}{L} p_2, \tag{L.3}$$

$$Q(x) \approx \left(1 - \frac{x}{L}\right) Q_1 + \frac{x}{L} Q_2. \tag{L.4}$$

Täten derivaatta $\mathrm{d}p / \mathrm{d}x = (p_2 - p_1)/L$ on x:n suhteen vakio ja siis

$$\begin{aligned}\int_0^L Q \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x &\approx \frac{p_2 - p_1}{L}\int_0^L \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right) Q_1 + \frac{x}{L} Q_2\right]\mathrm{d}x = \frac{p_2 - p_1}{L}\frac{Q_1 + Q_2}{2} L \\ &= (p_2 - p_1)\frac{Q_1 + Q_2}{2} \equiv (p_2 - p_1) Q_\mathrm{m},\end{aligned} \tag{L.5}$$

jossa Q_m on keskimääräinen tilavuusvirta. Soveltamalla lauseketta (L.5) kaavassa (L.2) saadaan lopuksi approksimaatio

$$-\int_V p d_{ii} \,\mathrm{d}V \approx p_2 (Q_\mathrm{m} - Q_2) + p_1 (Q_1 - Q_\mathrm{m}). \tag{L.6}$$

Tämä on looginen ainakin siinä mielessä, että kokoonpuristumattomassa virtauksessa, jolloin $d_{ii} = 0$, myös kaavan oikea puoli häviää, koska silloin $Q_1 = Q_2 = Q_\mathrm{m}$.