

## Varmuuskerroin väsymisen kontinuumimallissa

Tero Frondelius, Terhi Kaarakka, Osmo Kaleva, Reijo Kouhia, Heikki Orelma<sup>1</sup>,  
Joonas Vaara

**Tiivistelmä** Artikkelissa tarkastellaan äärettömään elinikään liittyvää varmuuskertoimen laskentaa kontinuumimekaniikkaan perustuvassa jännitysväsymismallissa. Jännityshistoria voi olla joko deterministinen tai stokastinen. Varmuuskertoimen laskenta redusoituu kestävyysfunktion maksimiarvon etsimiseen. Stokastisen jännityshistorian tapauksessa myös kestävyysfunktion arvot muodostavat stokastisen prosessin, jonka maksimiarvon todennäköisyysjakauma voidaan muodostaa. Menetelmää havainnollistetaan sekä yksinkertaisella yksidimensioisella että moniakselisella teollisella esimerkkilaskennalla.

*Avainsanat:* väsyminen, kontinuumimalli, varmuuskerroin, stokastinen jännityshistoria

*Vastaanotettu:* 6.2.2019. *Hyväksytty:* 8.10.2020. *Julkaistu verkossa:* 11.3.2021.

### Johdanto

Edellisessä artikkelissamme [2] tarkastelimme yleisesti väsymisen kontinuumimallia ja sen soveltumista tilanteeseen, jossa rakenteen elinikä on äärellinen. Tämä kirjoitus on suora jatko-osa tälle muodostaen kuitenkin oman itsenäisen kokonaisuutensa. Väsymisen kontinuumimallissa väsymisilmiötä käsitellään prosessina ja se muotoillaan hieman samaan tapaan kuin plastiset ainemallit käyttäen evoluutioyhtälöitä kestävyyspinnan liikkeen ja vaurion etenemisen kuvaamiseen [10].

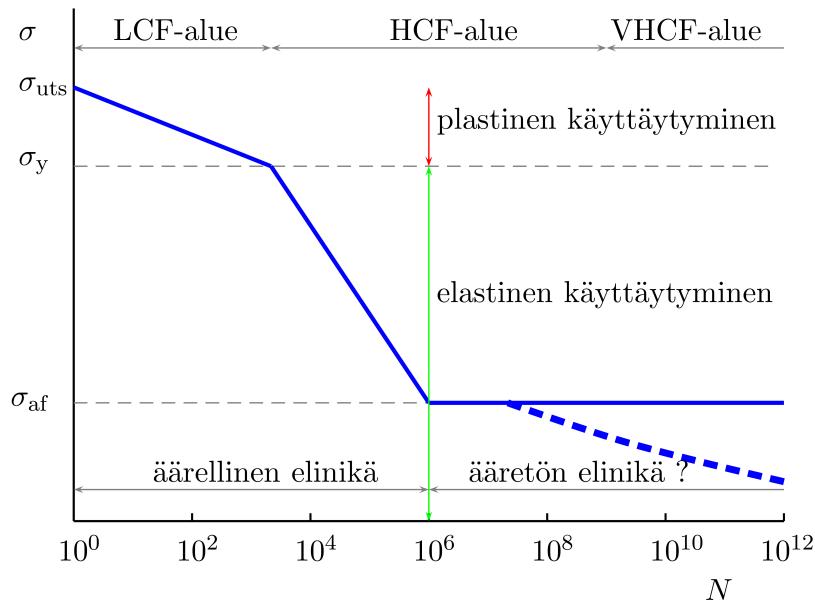
Toistuvan dynaamisen kuormituksen alaisten rakenteiden suunnittelussa kohdataan usein kysymys rakenteen eliniästä ja etenkin siitä, voiko rakenteen suunnitella kestäväksi, ainakin periaatteellisesti, äärettömän kauan? Kysymykseen on monimutkaisuudessaan hyvin vaikea antaa tarkkaa vastausta. Materiaaliominaisuuksien lisäksi elinikään vaikuttaa luonnollisesti monet muut seikat kemiallisesta korroosiosta inhimillisiin ennustamattomiin vahinkoihin.

Klassisissa yksiulotteisissa väsymistesteissä testisauvoja kuormitetaan tiettyyn rajaan asti (esimerkiksi  $10^7$  sykliä) tietyllä vaihtokuormituksella, ja mikäli vauriota ei tapahdu, sanotaan rakenteen kestäväksi äärettömän pitkään. Toistamalla mittaus erilaisilla jännitysamplitudeilla  $\sigma_a$  tietyllä kiinteällä keskijännityksellä  $\sigma_m$  saadaan aikaan materiaalin SN- tai Wöhlerin käyrä. SN-käyrä esittää tavallisesti amplitudin  $\sigma_a$  keston  $N$  funktiona

<sup>1</sup>Vastuullinen kirjoittaja: [heikki.orelma@tuni.fi](mailto:heikki.orelma@tuni.fi)

logaritmisessa asteikossa. Ääretön elinikä tarkoittaa usein insinöörien kielellä jännitys-historioita, jotka ovat väsymisrajan alapuolella. Tähän ajatteluun liittyy kuitenkin useita ongelmia. On syytä huomata, että SN-käyrä määritetään tekemällä mittauksia, joita voidaan tehdä kustannussyistä yleensä suhteellisen vähän ja näin käyriin tulisi suhtautua yleensä hyvin suuntaa-antavina, katso [12].

Perinteisesti on ajateltu, että tietyillä materiaaleilla kuten ferriittisillä teräksillä ja titaanilla on selvästi määritettävä äärettömän eliniän väsymisraja, kun taas esimerkiksi alumiinilla ja kuparilla<sup>2</sup> sellaista ei ole ja SN-käyrä on jatkuvasti aleneva. Nykyisin testausmenetelmien kehittyessä on kuitenkin alettu kyseenalaistamaan myös terästen jännitysväsymisraja. Kokeissa on havaittu, että hyvin suurilla toistomäärillä väsymisvaurioita tapahtuu myös klassista väsymisrajaa pienemmillä jännityksillä. Tätä on havainnollistettu kuvassa 1 katkoviivalla, katso myös [7, 11]. Tätä aluetta kutsutaan myös gigasykliväsymisalueeksi, ja tällä alueella esiintyvälle väsymisvauriolla on ominaista, että se ydintyy rakenteen sisältä eikä pinnan läheisyydestä kuten yleensä jännitysväsymisalueella [13, katso esim. kuva 4].



Kuva 1. SN-käyrän periaatteellinen kuvaaja tietyille materiaaleille ja johon on havainnollistettu myötöväsymisalue LCF (low-cycle fatigue), jännitysväsymisalue HCF (high-cycle fatigue) ja laajennettu jännitysväsymisalue VHCF (very high-cycle fatigue). Plastisella- ja elastisella käyttäytymisellä tarkoitetaan tässä makroskooppista käyttäytymistä. Myös jännitysväsymisalueella esiintyy rajoittuneesti paikallista plastista muodonmuutosta.

Tässä artikkelissa ääretön elinikä tarkoittaa klassista, edellä mainittua väsymisrajaa, joka koostuu väsymisrajaa pienemmistä amplitudeista. Käytännön sovelluksissa edellä mainitut rajoitukset on kuitenkin syytä pitää mielessä.

Yhteenvedona todettakoon, että äärelliseen elinikään liittyy runsaasti epävarmuutta aiheuttavia tekijöitä. Tästä syystä rakenteita suunniteltaessa onkin tapana mitoittaa niitä siten, että voidaan olla varma rakenteiden kestävydestä. Luonnollisesti tähän liittyy

<sup>2</sup>Alumiinin ja kuparin kiderakenne normaalilämpötiloissa on pintakeskinen kuutio kun taas ferriittisten terästen kiderakenne on tilakeskinen kuutio. Titaanin kiderakenne on heksagonaalinen. Kiderakenteen vaikutuksesta väsymislujuteen katso [1]

tällöin ylityösköisen riski. Varmuuden suhdetta väsymisrajaan kutsutaan varmuuskertoimeksi, jonka avulla suunnittelija pystyy varmistumaan intuitionsa lisäksi rakenteen kestävydestä ja myös liittämään ilmiöön lukuarvon. Edelleen tämä lukuarvo on ongelmallinen, sillä sille tulisi pystyä antamaan luonnollinen määritelmä, se pitäisi pystyä laskemaan myös monimutkaisemmille kuormituksille kuin yksinkertaiselle vaihtokuormituksille ja sen luonnolliset tilastolliset ominaisuudet tulisi pystyä määrittämään. Tässä artikkelissa näihin kysymyksiin vastataan käyttämällä hyväksi väsymisen kontinuumimallia, katso [2, 10]. Kontinuumimallissa varmuuskertoimen määrittely on luonnollista ja tulkitsemalla jännityshistoria stokastiseksi prosessiksi, voidaan kerroin tulkita satunnaismuuttujaksi ja laskea sen jakaumalle approksimaatio.

### Jännitysväsymisen kontinuumimalli

Kerrataan lyhyesti jännitysväsymisen kontinuumimallin teoreettinen perusta. Menetelmän esittelevät Lundin yliopiston tutkijat Niels Ottosen, Robert Stenström ja Matti Ristinmaa vuonna 2008 julkaistussa artikkelissaan [10]. Aiemmassa artikkelissamme [2] (katso myös [3, 4]) kontinuumimallin periaate esiteltiin yksityiskohtaisemmin, joten tyydymme nyt suppeampaan esitykseen. Kontinuumimallin ideana on määrittellä jännitysavaruuksessa väsymis- tai kestävyyspinta, joka isotrooppisessa tapauksessa on muotoa

$$\beta = \frac{1}{\sigma_{oe}}(\bar{\sigma} + AI_1 - \sigma_{oe}) = 0. \quad (1)$$

Kestävyyspinnan yhtälössä  $A$  ja  $\sigma_{oe}$  ovat positiivisia materiaaliparametreja,  $I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  ja  $\bar{\sigma} = \sqrt{3/2} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}\|_F = \sqrt{3/2} \sqrt{\text{tr}(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})^2}$ , jossa  $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{I} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma})/3$ . Materiaaliparametri  $\sigma_{oe}$  osoittautuu materiaalin keskijännityksellä  $\sigma_m = 0$  olevaksi väsymisrajaksi  $\sigma_{-1}$ . Kontinuumimallissa tensori  $\boldsymbol{\alpha}$  asemoi kestävyyspinnan jännitysavaruukseseen ja pinnan liikettä jännitysavaruuksessa hallitsee evoluutioyhtälö

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{cases} C(\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha})\dot{\beta}, & \text{kun } \beta, \dot{\beta} \geq 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (2)$$

Evoluutioyhtälöstä havaitaan, että kestävyyspinta muuttaa asemaansa silloin, kun jännitys liikkuu pinnan ulkopuolella siitä pois päin. Väsymisvauriota mitataan skalaarimuuttujalla  $D$ , jonka kertymistä mielivaltaisessa kuormitushistoriassa kuvataan evoluutioyhtälöllä

$$\dot{D} = \begin{cases} \frac{K}{(1-D)^k} \exp(L\beta)\dot{\beta}, & \text{kun } \beta, \dot{\beta} \geq 0, \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (3)$$

Vaurio kasvaa siis täsmälleen samaan aikaan, kun kestävyyspinta muuttaa asemaansa. Vaurio normeerataan yleensä siten, että alkuhetkellä  $D(0) = 0$  ja vaurio tapahtuu kun  $D(t_f) = 1$  jollakin  $t_f \geq 0$ . Edellä olevat parametrit  $C$ ,  $K$ ,  $L$  ja  $k$  ovat positiivisia materiaaliparametreja ja niiden estimoinnista löytyy tietoa lähteistä [2, 10].

Jännitys  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  oletetaan olevan tensoriarvoinen stokastinen prosessi (katso tarkemmin [2]), joten kaikki edellä olevat yhtälöt ovat stokastisia differentiaaliyhtälöitä. Erikoistapaus  $\text{Var}(\boldsymbol{\sigma}_{ij}(t)) = 0$  jokaisella  $i, j = 1, 2, 3$  ja jokaisella  $t \geq 0$  vastaa klassista determinististä tapausta. Eliniän ollessa ääretön oletetaan, että yhtälöt (2) ja (3) ratkaistaan joukossa  $[0, \infty)$  ja tällöin vaurioprosessi pysähtyy arvoon  $D^* < 1$ .

## Varmuuskerroin

Varmuuskertoimen määritelmä kontinuumimallissa perustuu kestävyyspinnan stabiloitumiseen tiettyyn stabiiliin asemaan ja tässä tilassa materiaaliparametrin  $\sigma_{oe}$  mahdollisen pienimmän arvon etsintään. Täsmällistä määritelmää varten tarvitaan käsitteistöä, mitä kehitetään seuraavaksi.

Olkoon  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  annettu deterministinen jännityshistoria ja  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  vastaava kestävyyspinnan keskipisteen liike. Oletetaan, että keskipisteen alkuehto on  $\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}_0$ . Luonnollisesti tensori  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  riippuu täysin kuormituksesta, mutta yleisesti voidaan olettaa äärettömän eliniän tapauksessa  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  stabiloituvan kohti jotain kiinteää pistettä, kun  $t \rightarrow \infty$ , koska  $D$  ei tällöin voi saavuttaa arvoa yksi. Annetaan ensimmäinen määritelmä:

- (a) *Stabiili tila*: Löytyy sellainen ajanhetki  $T$ , että  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = 0$  kun  $t \geq T$  ja tällöin  $\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_S$ .

Stabiililla tilalla tarkoitetaan tässä tensoria  $\boldsymbol{\alpha}_S$ , mihin kestävyyspinnan keskipisteen liike asettuu. Stabiilista tilasta erotetaan:

- (b) *Tasaisesti stabiili tila*: Löytyy sellainen ajanhetki  $T$  ja minimaalinen vakio  $M$ , että  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = 0$  ja  $\beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}_S; \sigma_{-1}) \leq M < 0$  kun  $t \geq T$ , missä  $\boldsymbol{\alpha}_S$  on vastaava kestävyyspinnan stabiilin tilan keskipiste.

Tasaisesti stabiilissa tilassa jännitystensorin  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  arvot pysyvät pinnan  $\beta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_S; \sigma_{-1}) = M$  sisäpuolella. Suoralla laskulla näemme, että

$$\beta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}; \sigma_{-1}) - M = (M + 1)\beta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}; \sigma_{-1}(M + 1)).$$

Nyt huomataan, että väsymisrajaa voitaisiin pienentää väsymisrajaksi  $\sigma' := \sigma_{-1}(M + 1)$  jännitysten silti pysyessä tasaisesti stabiilissa tilassa pinnan  $\beta(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\alpha}_S; \sigma') = 0$  sisäpuolella. Fysikaalisesti tämä tarkoittaa sitä, että ääretön elinikä saavutettaisiin, vaikka materiaalilta vaadittaisiin heikommat lujuusominaisuudet. Minimaalista materiaaliparametria  $\sigma^*$  kutsutaan *reduoiduksi väsymisrajaksi* ja tätä vastaavaa tasaisesti stabiilia tilaa  $\boldsymbol{\alpha}_S^*$  *asymptoottisesti stabiiliksi tilaksi*. Varmuuskeroiin määritellään suhteena<sup>3</sup>

$$\mathcal{S} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma^*}.$$

Miksi sitten edellä mainittu  $\sigma'$  ei yleisesti kelpaa reduoiduksi väsymisrajaksi? Yksinkertaisesti siitä syystä, että se riippuu alkuehdosta  $\boldsymbol{\alpha}_0$ . Evoluutioyhtälön (2) mukaisesti piste  $\boldsymbol{\alpha}(t)$  liikkuu suuntaan  $\mathbf{s}(t) - \boldsymbol{\alpha}(t)$ , joka riippuu alkuehdosta ja näin ollen eri alkuehtopisteistä lähteville ratkaisuille ei ole takeita, että ne stabiloituisivat samaan pisteeseen  $\boldsymbol{\alpha}_S$ . Tarkasteltaessa vauriopinnan yhtälöä

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}_S\|_F + AI_1(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma' = 0$$

stabiilissa tilassa, huomataan että  $\sigma' = \sigma^*$  täsmälleen silloin kun normi  $\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}_S\|_F$  saa miniminsä kaikkien mahdollisten tasaisesti stabiilien tilojen suhteen ja minimiarvo on tällöin  $\|\mathbf{s} - \boldsymbol{\alpha}_S^*\|_F$ . Näin ollen asymptoottisesti stabiilin tilan tulee olla yksikäsitteinen ja alkuehdosta riippumaton.

<sup>3</sup>Varmuusluvun määrittämiseksi väsymisanalyysissä on useita tapoja, katso esim. [12, Luku 3.3].

Asymptoottisesti stabiilissa tilassa  $\beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}_S^*; \sigma^*) \leq M^* < 0$  kun  $t \geq T^*$ , on siis  $\sigma^* = (1 + M^*)\sigma_{-1}$  ja

$$\mathcal{S} = \frac{1}{1 + M^*},$$

jossa

$$M^* = \max_{t \geq T^*} \beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}_S^*; \sigma_{-1}).$$

Koska  $\boldsymbol{\alpha}_S^*$  on asymptoottisesti stabiili tila, voidaan sitä etsiä rajoitettuna min-max -ongelmana

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\alpha}} \max_{t \geq 0} \beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}; \sigma_{-1}), \\ \max_{t \geq 0} \beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}; \sigma_{-1}) \leq 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Tämän muotoinen ongelma voidaan ratkaista klassisella epälineaarisen optimoinnin sakofunktiomenetelmällä. Kuitenkin, jos funktio  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  ei ole periodinen, on optimointiongelman ratkaisu työlästä ja jätämme tämän tulevaisuuteksi tutkimusaiheeksi.

### *Periodinen deterministinen jännitys*

Oletetaan, että tensori  $\boldsymbol{\sigma}(t)$  on periodinen, olkoon periodi  $t_p$ , jolloin sen maksimi voidaan laskea yhden periodin yli

$$\beta_{\max}(\boldsymbol{\alpha}) = \max_{0 \leq t < t_p} \beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \boldsymbol{\alpha}; \sigma_{-1}).$$

Ottaen huomioon se, ettei varmuuskerrointa ole tarpeen määrittää usean desimaalin tarkkuudella ja emme ole kiinnostuneita itse tensorista  $\boldsymbol{\alpha}_S^*$ , vaan kohdefunktion minimiarvosta, voidaan periodisessa tapauksessa ottaa käyttöön seuraava likimääräinen menetelmä. Oletetaan, että  $\beta_{\max}(\boldsymbol{\alpha})$  on edellä määritelty. Muodostetaan jännitysavaruuksen hila

$$V(h) = S \cap h\mathbb{Z}^6,$$

jossa  $h > 0$  on hilaparametri ja  $S$  jokin sopiva joukko, siten että  $\beta_{\max} > 0$  tämän ulkopuolella ja etsitään

$$M^* \approx \min_{\boldsymbol{\alpha} \in V(h)} \beta_{\max}(\boldsymbol{\alpha}).$$

**Esimerkki 1** Tarkastellaan yksidimensioista jännityshistoriaa

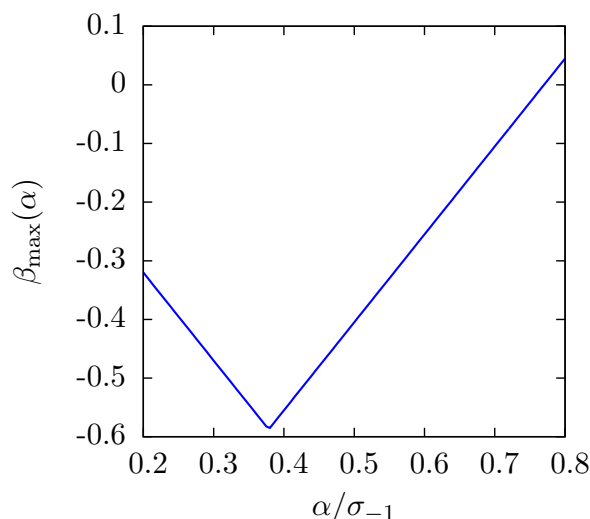
$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi t/t_p),$$

kun  $\sigma_m = 0.5\sigma_{-1}$  ja  $\sigma_a = 0.3\sigma_{-1}$ . Käytetään materiaaliparametreille lähteessä [10] esitettyjä AISI-SAE 4340 teräksen materiaaliarvoja:  $\sigma_{-1} = 490$  MPa,  $A = 0.225$ ,  $C = 1.25$ ,  $K = 2.65 \times 10^{-5}$ ,  $L = 14.4$ ,  $k = 0$ . Yksidimensioisen jännitystilän tapauksessa myös tensoria  $\boldsymbol{\alpha}$  voidaan kuvata yhdellä muuttujalla  $\alpha$ , joten funktio

$$\beta_{\max}(\alpha) = \max_{0 \leq t < 1} \beta(\boldsymbol{\sigma}(t), \alpha; \sigma_{-1})$$

ja sen kuvaaja on piirretty kuvaan 2. Nähdään, että  $\alpha_S^* \approx 0.38$  ja  $M^* = \beta_{\max}(\alpha_S^*) \approx -0.585$ , joten varmuuskertoimeksi saadaan

$$\mathcal{S} = \frac{1}{1 + M^*} \approx 2.41.$$



Kuva 2. Funktio  $\beta_{\max}(\alpha)$ .

### Stokastinen jännitys

Jos jännityshistoria  $\sigma(t)$  on stokastinen prosessi on myös funktio  $\beta(\sigma(t), \alpha(t); \sigma_{-1})$  stokastinen prosessi ja  $M$  on stokastisen prosessin maksimi-arvo, joka meidän tapauksessamme  $M < 0$ . Maksimi-arvo  $M$  on näin ollen satunnaismuuttuja ja sen asymptoottisen jakauman kertymäfunktio on muotoa

$$F_M(m) = \begin{cases} \exp(-(-am - b)^c), & \text{kun } m < 0, \\ 1, & \text{kun } m \geq 0, \end{cases}$$

katso esimerkiksi [8]. Kertymäfunktion parametrit  $a, b, c$  tulee estimoida tarkasteltavasta datasta. Laskuissa on minimointiongelma (4) ratkaistava jokaiselle realisaatioille  $\{\tilde{\sigma}_j(t)\}_{j=1}^n$  erikseen, joka tuottaa satunnaismuuttujalle  $M^*$  näytteet  $\{\tilde{M}_j^*\}_{j=1}^n$ , joista kertymäfunktion parametrit voidaan määrätä.

Käytännössä edellä oleva laskenta on erittäin työläs. Tarkastellaan tilannetta, jossa jännityshistoria  $\sigma(t)$  on stokastinen prosessi muotoa

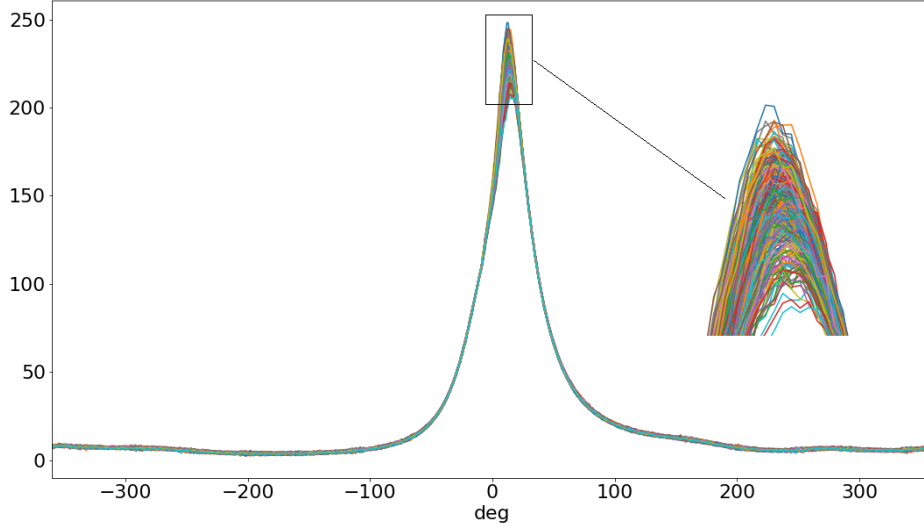
$$\sigma(t) = \sigma_{\text{per}}(t) + \sigma_{\text{koh}}(t),$$

ja oletetaan, että  $\sigma_{\text{per}}(t)$  on tavallinen periodinen funktio ja että kohinan odotusarvo  $E(\sigma_{\text{koh}}(t)) = 0$ . Tällöin voidaan funktiolle  $\sigma_{\text{per}}(t)$  laskea asymptoottisesti stabiili tila  $\alpha_S^*$  esimerkiksi edellisessä luvussa esitellyllä likimääräisellä menetelmällä. Tämän kiinnitetyn asymptoottisesti stabiilin tilan approksimaation avulla voidaan laskea näytteet

$$\tilde{M}_j^* \approx \max_{t \geq 0} \beta(\tilde{\sigma}_j(t), \alpha_S^*; \sigma_{-1})$$

kun  $j = 1, \dots, n$ .

**Huomautus.** Edellä olevaa menetelmää voidaan soveltaa myös yleisen stokastisen prosessin  $\sigma(t)$  tapauksessa, missä lasketaan ensin  $\alpha_S^*$  odotusarvoprosessille  $E\sigma(t)$ , ja sitten jatketaan kuten edellä.



Kuva 3. Sylinteripainehistoriat ( $p$  [bar]) yhden työkierron aikana.

**Esimerkki 2.** Tarkastellaan esimerkkinä nelitahtimoottorin kiertokangen varmuuskertoimen laskentaa kun kuormituksena on tilastollista dataa sylinterin painehistoriasta yhden työkierron aikana.<sup>4</sup> Painehistoriat on esitetty kuvassa 3. Näistä painehistorioista on laskettu kiertokangen jännityshistoriat, jotka luonnollisesti ovat moniaksaalisia. Varmuuskertoimen laskentaa varten on kiertokangesta valittu edustava kohta.

Jokaista painehistoriaa vastaa siten jännityspolku jännitysvaruudessa. Tulkitaan jännityspolkuja realisaatioiksi  $\{\tilde{\sigma}_j(t)\}_{j=1}^{300}$ , kun  $-360 \leq t \leq 360$ . Lasketaan asympotoottisesti stabiili  $\alpha_S^*$  tila näiden keskiarvoprosessille ja muodostetaan

$$\tilde{M}_j^* \approx \beta(\tilde{\sigma}_j(0), \alpha_S^*; \sigma_{-1}), \quad j = 0, \dots, 300.$$

Kuvassa 4 näiden näytteiden kertymäfunktion empiirinen jakauma ja siihen edellä sovitettu edellä mainittu kertymäfunktio parametreilla  $a = 1$ ,  $b = -0.53$  ja  $c = 17$ . Nyt haluamme sen varmuuskertoimen alarajan  $\mathcal{S}_{AR}$ , jonka  $\mathcal{S}$  saavuttaa 80% varmuudella. Toisin sanoen

$$0.8 = \mathbb{P}(\mathcal{S} \geq \mathcal{S}_{AR}) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{M^*+1} \geq \mathcal{S}_{AR}\right) = \mathbb{P}(M^* \leq \frac{1}{\mathcal{S}_{AR}} - 1).$$

Siten

$$m_{0.8} = \frac{1}{\mathcal{S}_{AR}} - 1 \quad \text{ja edelleen} \quad \mathcal{S}_{AR} = \frac{1}{m_{0.8} + 1}.$$

Koska

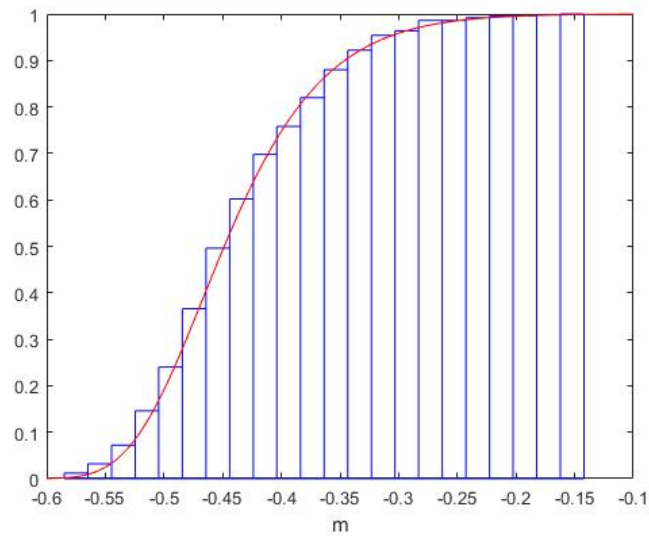
$$0.8 = F_M(m_{0.8}) = \exp(-(-m_{0.8} + 0.53)^{17}),$$

niin yhtälöstä ratkaisemalla saamme  $m_{0.8} = -0.37$  ja edelleen  $\mathcal{S}_{AR} = 1.63$ .

## Yhteenveto

Artikkelissa on tarkasteltu varmuuskertoimen määrittelyä erityisesti kontinuumilähestymistavan mukaisessa jännitysväsymismallissa. Varmuuskerroin määritellään materiaalin

<sup>4</sup>Nelitahtimoottorin kiertokangen laskenta on esitetty lähteissä [9, 6]. Moottorilaskennan historiasta kiinnostuneille löytyy [5].



Kuva 4. Empiirinen kertymäfunktio ja teoreettinen jakauma.

väsymisrajan ja minimaalisen redusoidun väsymisrajan suhteena. Redusoidulla väsymisrajalla tarkoitetaan kuvitteellista väsymisrajaa, joka määrittelee tasaisesti stabiilin kestävyyspinnan, jonka sisäpuolelle kaikki tarkasteltavat jännityshistoriat jäävät. Menettelyä on havainnollistettu kahdella esimerkillä, joista toisen jännityshistoria on deterministinen yksiakselinen ja toisen moniakselisen esimerkin kuormitushistoria perustuu joukkoon mittauksia. Tällöin varmuuskerroin on satunnaismuuttuja ja sille on laskettu jakauma.

### Kiitokset

Tässä esitetty tutkimus on osa Business Finlandin tukemaa projektia WIMMA Dnro 1566/31/2015.

### Viitteet

- [1] A. Ferro, P. Mazzetti, G. Montalenti, On the effect of the crystalline structure on fatigue: Comparison between body-centred metals (Ta, Nb, Mo and W) and face-centred and hexagonal metals, *The Philosophical Magazine: A Journal of Theoretical Experimental and Applied Physics*, 12 (118) 1965 867-896. <https://doi.org/10.1080/14786436508218923>.
- [2] Kaarakka, T. E., Frondelius, T., Kaleva, O., Kouhia, R., Orelma, H., & Vaara, J. (2019). Jännitysväsymisen kontinuumimalli. *Rakenteiden Mekaniikka*, 52(4), 236-243. <https://doi.org/10.23998/rm.76262>
- [3] T. Frondelius, T. Kaarakka, R. Kouhia, J. Mäkinen, H. Orelma, J. Vaara, Stochastic continuum approach to high-cycle fatigue: Modelling stress history as stochastic process, lähetetty vertaisarvioitavaksi.
- [4] T. Frondelius, T. Kaarakka, R. Kouhia, H. Orelma, J. Vaara, Evolution equation based continuum approach for fatigue, *Proc. of IX int. conf. "The problems of dynamics of interaction of deformable media"*, 1-6.10.2018, Goris, Armenia



- [5] T. Frondelius, H. Tienhaara, M. Haataja, History of Structural Analysis & Dynamics of Wärtsilä Medium Speed Engines, *Rakenteiden Mekaniikka*, 51(2) (2018) 1–31. <https://doi.org/10.23998/rm.69735>
- [6] J. Göös, A. Leppänen, A. Mäntylä, T. Frondelius, Large bore connecting rod simulations, *Rakenteiden Mekaniikka*, 50(3) (2017) 275–278. <https://doi.org/10.23998/rm.64658>
- [7] J. Korhonen, J. Kuoppala, M. Vääntänen, J. Vaara, M. Turunen, P. Kämäräinen, J. Laine, A. Silvonen, T. Frondelius, QT steel High Cycle Fatigue Testing with Ultrasonic. *Rakenteiden Mekaniikka*, 50(3) (2017) 304–308. <https://doi.org/10.23998/rm.65059>
- [8] M. R. Leadbetter, H. Rootzén, Extremal Theory for Stochastic Processes, *The Annals of Probability*, 16 (2) (1988) 431–478.
- [9] A. Mäntylä, J. Göös, A. Leppänen, T. Frondelius, Large bore engine connecting rod fretting analysis, *Rakenteiden Mekaniikka*, 50(3) (2017) 239–243. <https://doi.org/10.23998/rm.64914>
- [10] N. Ottosen, R. Stenström, M. Ristinmaa, Continuum approach to high-cycle fatigue modeling, *International Journal of Fatigue*, 30 (6) (2008) 996–1006. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2007.08.009>.
- [11] D. S. Paolino, A. Tridello, H. S. Geng, G. Chiandussi, M. Rossetto, Dublex S-N fatigue curves: statistical distribution of the transition fatigue life, *Frattura ed Integrità Strutturale*, 30 (2014) 417–423.
- [12] R. Rabb, *Väsyminen ja todennäköisyysteoria*, Juvenes print, Oulu, 2017.
- [13] K. Shiozawa, L. Lu, Very high-cycle fatigue behaviour of shot-peened high-carbon-chromium bearing steel, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 25 (8-9) (2002) 813–822. <https://doi.org/10.1046/j.1460-2695.2002.00567.x>.

Tero Frondelius  
 Oulun yliopisto  
 Pentti Kaiteran katu 1  
 90014 Oulu  
[tero.frondelius@oulu.fi](mailto:tero.frondelius@oulu.fi)

Terhi Kaarakka, Osmo Kaleva, Reijo Kouhia, Heikki Orelma  
 Tampereen yliopisto  
 Korkeakoulunkatu 10  
 33720 Tampere  
[terhi.kaarakka@tuni.fi](mailto:terhi.kaarakka@tuni.fi), [osmo.kaleva@gmail.com](mailto:osmo.kaleva@gmail.com), [reijo.kouhia@tuni.fi](mailto:reijo.kouhia@tuni.fi),  
[heikki.orelma@tuni.fi](mailto:heikki.orelma@tuni.fi)

Joona Vaara, Tero Frondelius  
 Wärtsilä Finland Oy  
 Järvikatu 2-4  
 65100 Vaasa  
[joona.vaara@wartsila.com](mailto:joona.vaara@wartsila.com), [tero.frondelius@wartsila.com](mailto:tero.frondelius@wartsila.com)