

Venymämitat kontinuumimekaniikassa Fingerin ja Piolan mukaan

Martti Mikkola

Tiivistelmä. Suhteellinen muodonmuutos kontinuumimekaniikassa voidaan määrittää usealla tavalla. Tavallisimmin käytetyt venymämitat johtavat kovariantteihin tensoreihin (Green-Lagrange, Almansi-Euler). Finger ja Piola ovat esittäneet venymämitat, joiden tensorit ovat kontravariantteja. Artikkelissa tarkastellaan näiden venymämittojen johtamista ja ominaisuuksia sekä niihin liittyviä jännityksiä. Sovelluksina tarkastellaan vedettyä sauvaa ja yksinkertaista leikkausta.

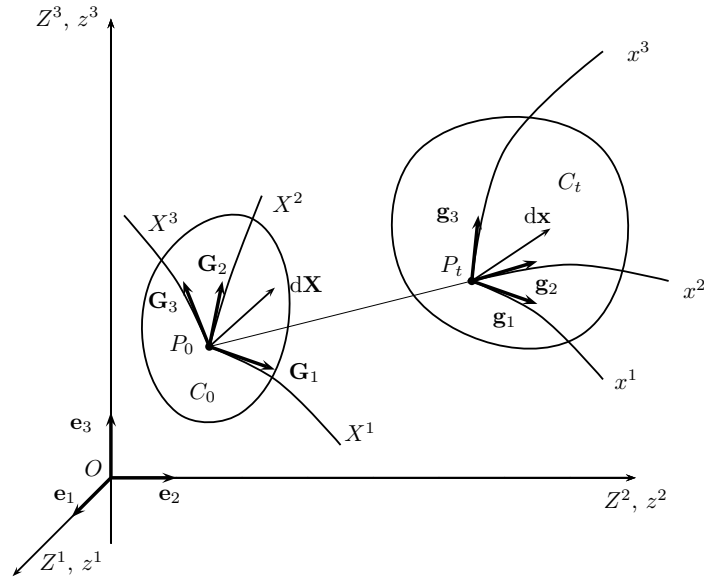
Avainsanat: muodonmuutos, Fingerin ja Piolan venymämitat, venymänopeus, jännitysmitta.

Vastaanotettu 19.10.2017. Hyväksytty 13.12.2017. Julkaistu verkossa 14.12.2017.

Johdanto

Tässä esityksessä vektoreita merkitään vinoilla lihavoiduilla kirjaimilla ja niiden dyadituloa $\mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$. Toisen kertaluvun tensoreita merkitään pystyillä lihavoiduilla kirjaimilla $\mathbf{T} = T^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = T_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$. Vektorit ja tensorit ovat koordinaatistosta riippumattomia, mutta ne voidaan esittää joko kovariantin tai kontravariantin kantajärjestelmän avulla. Kovariantti kantajärjestelmä on $\{\mathbf{g}_k\}$ ja kontravariantti vastaavasti $\{\mathbf{g}^k\}$. Niillä on ominaisuus $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^l = \delta_k^l$. On tapana nimittää komponenttimuodossa T_{kl} esitettyä tensoria kovariantiksi, ts. tensori on esitetty kontravariantin kannan avulla, ja komponenttimuodossa T^{kl} esitettyä kontravariantiksi, jolloin se siis on esitetty kovariantin kannan avulla. Kun halutaan korostaa kumpaa esitysmuotoa käytetään, kovariantille tensorille käytetään merkintää \mathbf{T}^b ja kontravariantille merkintää \mathbf{T}^d . Voidaan käyttää myös sekamuotoista esitystä $\mathbf{T} = T_{kl}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l = T_k^l \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}_l$. Suorakulmaisessa yksikkökantajärjestelmässä $\{\mathbf{e}_k\}$ kovariantit ja kontravariantit kantavektorit tietenkin yhtyvät. Esitystapa noudattaa melko tarkasti G.A. Holzapfelin kirjaa [8] ja osittain myös Başarin ja Weichertin teosta [1]. Myös A.Cemal Eringenin [2] kinematiikan esitystä on hyödynnetty.

Tarkastellaan kontinuumikappaletta, joka sijaitsee kolmiulotteisessa euklidisessä avaruudessa (kuva 1). Peruskoordinaatisto on kiinteä suorakulmainen koordinaatisto, jonka koordinaattiakselien suuntaiset yksikkökantavektorit ovat $\{\mathbf{e}_k\}$. Ainepisteen paikkavektori tässä koordinaatistossa on alkutilassa $\mathbf{P} = Z^K \mathbf{e}_K$ ja deformaation lopputilassa $\mathbf{p} = z^k \mathbf{e}_k$. Paikkavektorit referoidaan samaan karteesisen koordinaatistoon, mutta



Kuva 1. Deformoituva kappale koordinaatistoinen alkutilassa C_0 ja lopputilassa C_t .

selvyyden vuoksi alkutilaan viitataan isoilla kirjaimilla ja deformatiiviseen tilaan pienillä. Käytetään myös käyräviivaista koordinaatistoa X^K , ($K = 1, 2, 3$) siten, että $Z^K = Z^K(X^1, X^2, X^3)$. Deformatiivisessa tilassa voi olla toinen käyräviivainen koordinaatisto x^k , ($k = 1, 2, 3$) siten, että $z^k = z^k(x^1, x^2, x^3)$. Deformaation tapahtuessa käyräviivaisen koordinaatiston koordinaattiviivat, jotka käsittävät samat ainepisteet, myös deformatiivuvat, niin että deformatiivisessa tilassa niitä esittävät konvektiiviset koordinaattiviivat $x^k = x^k(X^1, X^2, X^3)$. Ainepisteisiin kiinnittyvät koordinaatit X^K ja Z^K ovat materiaalkoordinaatteja ja paikkakoordinaatit x^k ja z^k spatiaalkoordinaatteja.

Alkutilassa käyräviivaisen koordinaatiston koordinaattiviivojen tangenttivektorit

$$\mathbf{G}_K = \frac{\partial Z^M}{\partial X^K} \mathbf{e}_M \quad (1)$$

muodostavat kovariantin kantajärjestelmän $\{\mathbf{G}_K\}$. Niitä vastaava kontravariantti kanta on

$$\mathbf{G}^K = \frac{\partial X^K}{\partial Z^M} \mathbf{e}^M. \quad (2)$$

Nämä kantavektorit ovat toistensa suhteen resiprookkiset (duaaliset), mitä kuvaa yhtälö

$$\mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}^M = \delta_K^M. \quad (3)$$

Deformatiivisessa tilassa vastaavat kantavektorit ovat

$$\mathbf{g}_k = \frac{\partial z^m}{\partial x^k} \mathbf{e}_m, \quad (4)$$

jotka muodostavat kovariantin kantajärjestelmän $\{\mathbf{g}_k\}$, ja vastaavasti

$$\mathbf{g}^k = \frac{\partial x^k}{\partial z^m} \mathbf{e}^m, \quad (5)$$

jotka muodostavat kontravariantin kantajärjestelmän $\{\mathbf{g}^k\}$. Konvektiivisten koordinaattiviivojen tangenttivektorit ovat

$$\mathbf{g}_K = \frac{\partial x^m}{\partial X^K} \mathbf{g}_m, \quad (6)$$

jotka ovat kovariantteja. Vastaava kontravariantti kanta on

$$\mathbf{g}^K = \frac{\partial X^K}{\partial x^m} \mathbf{g}^m. \quad (7)$$

Näiden vektorien indekseinä käytetään isoja kirjaimia osoittamassa, että ne liittyvät materiaalikoordinaatteihin. Niillä on myös resiprookkisuusominaisuus

$$\mathbf{g}_K \cdot \mathbf{g}^M = \delta_K^M. \quad (8)$$

Deformoituvan kappaleen paikallinen venymätila määritetään tavallisesti deformaatiogradientin \mathbf{F} avulla. Deformaatiogradientti sisältää informaation paitsi viiva-alkioiden venymistä ja niiden välisten kulmien muutoksista myös paikallisesta jäykän kappaleen kiertymästä. Venymiä voidaan mitata eri tavoilla: yleensä tarkastellaan viiva-alkioiden neliöiden muuttumista, jolloin päädytään Greenin-Lagrangen, Almansin-Eulerin, Piolan ja Fingerin venymämittoihin [1, 2, 3, 8, 12]. Muita venymämittoja ovat esim. logaritminen venymä [6] ja ns. yleistetyt venymät [7, 14]. Vielä yleisempään venymätilan määrittelyyn tullaan ottamalla huomioon siirtymien korkeammat derivaatat, esim. venymän 1. tai 2. gradientti [10]. Tässä artikkelissa tarkastellaan vain Fingerin ja Piolan venymämittoja, jotka harvoin esitetään kontinuumimekaniikan oppikirjoissa.

Deformaatiogradientti ja sen käänneistensori

Alkutilan viiva-alkion $d\mathbf{P} = d\mathbf{X}$ pituuden neliö on

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX^K \mathbf{G}_K \cdot \mathbf{G}_L dX^L = dX^K G_{KL} dX^L. \quad (9)$$

Tensori $\mathbf{G} = G_{KL} \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L$ on alkutilan metrinen tensori. Deformaatiossa viiva-alkio $d\mathbf{X}$ kuvautuu viiva-alkioksi $d\mathbf{p} = d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$ deformaatiogradientin \mathbf{F} avulla, ks. kuva 1,

$$\mathbf{F} = \frac{\partial x^k}{\partial X^M} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^M = F_{.M}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^M = \mathbf{g}_M \otimes \mathbf{G}^M. \quad (10)$$

Deformoituneen viiva-alkion pituuden neliö on

$$ds^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx^k g_{kl} dx^l = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}. \quad (11)$$

Muodonmuutostensori \mathbf{C} on Cauchyn-Greenin oikeanpuoleinen muodonmuutostensori

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \frac{\partial x^k}{\partial X^M} g_{kl} \frac{\partial x^l}{\partial X^N} \mathbf{G}^M \otimes \mathbf{G}^N = F_{.M}^k g_{kl} F_{.N}^l \mathbf{G}^M \otimes \mathbf{G}^N = C_{MN} \mathbf{G}^M \otimes \mathbf{G}^N. \quad (12)$$

Tensori $\mathbf{g} = g_{kl} \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$ on deformoituneen tilan metrinen tensori.

Vastaavalla tavalla deformoituneen tilan koordinaattiviivat x^k esittävät niitä materiaalipartikkeleita, jotka ovat peräisin alkutilan pisteistä $X^K(x^1, x^2, x^3)$. (Tämä käänneinen yhtälö voidaan muodostaa, sillä $\det(\mathbf{F}) > 0$). Ne muodostavat alkutilassa käyräviivaiset koordinaatit, joiden tangenttivektorit ovat

$$\mathbf{G}_k = \frac{\partial X^M}{\partial x^k} \mathbf{G}_M. \quad (13)$$

Vastaava kontravariantti kanta on

$$\mathbf{G}^k = \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \mathbf{G}^K. \quad (14)$$

Näiden vektorien indekseinä käytetään pieniä kirjaimia osoittamassa, että ne liittyvät spatiaalikoordinaatteihin. Ne toteuttavat tietenkin yhtälöt

$$\mathbf{G}_k \cdot \mathbf{G}^m = \delta_k^m. \quad (15)$$

Deformoituneen tilan viiva-alkio $d\mathbf{x}$ on lähtöisin alkutilan viiva-alkiosta $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x}$ deformaatiogradientin käänteistensorin \mathbf{F}^{-1} avulla (ks. [8] s.71)

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial X^K}{\partial x^m} \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{g}^m = \mathbf{G}_m \otimes \mathbf{g}^m. \quad (16)$$

Alkutilan viiva-alkion pituuden neliö on

$$dS^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{X}. \quad (17)$$

Muodonmuutostensori \mathbf{b} on Cauchyn-Greenin vasemmanpuoleinen muodonmuutostensori

$$\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \frac{\partial x^k}{\partial X^M} G^{MN} \frac{\partial x^l}{\partial X^N} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = F_{.M}^k G^{MN} F_{.N}^l \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = b^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (18)$$

Huomataan, että tensori \mathbf{C} on kovariantti, kun taas tensori \mathbf{b} on kontravariantti. Kuten johdannossa mainitaan, kovarianttia tensoria merkitään usein yläindeksillä \flat ja kontravarianttia vastaavasti yläindeksillä \sharp . Voidaan näyttää, että $\mathbf{R}\mathbf{C}^\flat\mathbf{R}^T = \mathbf{b}^\sharp$ ja että $\mathbf{R}(\mathbf{C}^{-1})^\sharp\mathbf{R}^T = (\mathbf{b}^{-1})^\flat$, jossa \mathbf{R} on polaarihajoittelussa esiintyvä rotaatiotensori.

Polaarihajoitelma

Tunnetusti deformaatiogradientille pätee polaarihajoitelma, jonka mukaan se on kahden tensorin tulo

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{v}\mathbf{R}, \quad (19)$$

Tensori \mathbf{R} on rotaatiotensori, joka voidaan esittää muodossa

$$\mathbf{R} = R_{.M}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{G}^M, \quad \mathbf{R}^T = R_{.m}^K \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{g}^m. \quad (20)$$

Rotaatiotensori toteuttaa yhtälöt

$$\mathbf{R}^T\mathbf{R} = R_{.m}^K \delta_{.k}^m R_{.N}^k \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^N = R_{.m}^K R_{.N}^m \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^N = \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^K = \mathbf{G},$$

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^T = R_{.M}^k \delta_{.K}^M R_{.m}^K \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^m = R_{.K}^k R_{.m}^K \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^m = \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^k = \mathbf{g}.$$

Metriset tensorit \mathbf{G} ja \mathbf{g} ovat samalla yksikkötensorit alkutilassa ja deformoituneessa tilassa.

Tensorit \mathbf{U} ja \mathbf{v} ovat symmetriset venytystensorit

$$\mathbf{U} = U_{.L}^K \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}^L = U_{KL} \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L, \quad \mathbf{v} = v_{.l}^k \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}^l = v^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (21)$$

Fingerin muodonmuutostensori

Deformoituneen tilan viiva-alkio $d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{g}^k$ kierretään alkutilaan $d\mathbf{X} = \mathbf{R}^T d\mathbf{x}$. Tämä alkutilan viiva-alkio siirretään deformaatiogradientin avulla

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{F}d\mathbf{X} = \mathbf{vR}d\mathbf{X} = \mathbf{vRR}^T d\mathbf{x} = \mathbf{v}d\mathbf{x}.$$

Tämän viiva-alkion pituuden neliö on

$$d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}^T \mathbf{v} d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}\mathbf{v}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{FF}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{b}d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Alkutilan viiva-alkion neliö on

$$d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{RR}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = dx_k g^{kl} dx_l.$$

Deformoituneen ja alkutilan viiva-alkioiden neliöiden erotus on

$$d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{g})d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}d\mathbf{x}. \quad (23)$$

Tensori \mathbf{a} on Fingerin muodonmuutostensori [3], [4]

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{g}) = a^{kl} \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x^k}{\partial X^M} G^{MN} \frac{\partial x^l}{\partial X^N} - g^{kl} \right) \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (24)$$

Huomataan, että Fingerin muodonmuutostensori on kontravariantti ja että se on määritelty deformaatiogradientin tilassa. Se on objektiivinen siinä mielessä, että se häviää identtisesti jäykän kappaleen liikkeessä.

Macvean [9] huomauttaa, että Fingerin muodonmuutostensori saadaan myös tulkitsemalla se Greenin-Lagrangen muodonmuutostensoriksi deformaatiogradientin tilasta käsin ('the Green measure of deformation in final state'). Näin voidaan todella ajatella: Deformoituneesta tilasta viiva-alkio $d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{g}^k$ kuvataan alkutilaan $d\mathbf{X} = \mathbf{F}^T d\mathbf{x}$, minkä jälkeen muodostetaan viiva-alkioiden neliöiden erotus $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{FF}^T - \mathbf{g})d\mathbf{x}$.

Piolan muodonmuutostensori

Alkutilan viiva-alkio $d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{G}^K$ kierretään deformaatiogradientin tilaan $d\mathbf{x} = \mathbf{R}d\mathbf{X}$. Tämä deformaatiogradientin tilan viiva-alkio siirretään alkutilaan deformaatiogradientin käänteistensorin avulla

$$d\mathbf{X}' = \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T d\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{R}^T \mathbf{R}d\mathbf{X} = \mathbf{U}^{-1}d\mathbf{X}.$$

Tämän viiva-alkion pituuden neliö on

$$d\mathbf{X}' \cdot d\mathbf{X}' = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{U}^{-T} \mathbf{U}^{-1} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C}^{-1} d\mathbf{X}. \quad (25)$$

Deformoituneen tilan viiva-alkion neliö on

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{R} d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = dX_K G^{KL} dX_L.$$

Deformoituneen ja alkutilan viiva-alkioiden neliöiden erotus on

$$d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{C}^{-1})d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{A}d\mathbf{X}. \quad (26)$$

Tensori \mathbf{A} on Piolan muodonmuutostensori [11], [12], [13]

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{G} - \mathbf{C}^{-1}) = A^{KL} \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{G}^{KL} - \frac{\partial X^K}{\partial x^m} g^{mn} \frac{\partial X^L}{\partial x^n}) \mathbf{G}_K \otimes \mathbf{G}_L. \quad (27)$$

Huomataan, että Piolan muodonmuutostensori on kontravariantti ja että se on määritelty alkutilassa. Se on objektiivinen, ts. se on nollatensori jäykän kappaleen liikkeessä.

Macveanin [9] mukaan Piolan muodonmuutostensori voidaan myös tulkita Almansin muodonmuutostensoriksi alkutilasta lähtien ('Almansischer Verzerrungstensor im Ausgangszustand'). Silloin alkutilan viiva-alkio $d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{G}^K$ kuvataan deformatuneeseen tilaan $d\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{X}$, minkä jälkeen muodostetaan viiva-alkioiden neliöiden erotus $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{G} - \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T}) d\mathbf{X}$.

Muodonmuutostensorien vertailu

Havainnollistetaan muodonmuutostensorien keskinäistä suhdetta seuraavalla tavalla:

Green-Lagrange:

$$\text{Alkutila: } d\mathbf{X} = dX^K \mathbf{G}_K, \quad \text{Deformatunut tila: } d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{g}_k = \mathbf{F} d\mathbf{X},$$

Almansi-Euler:

$$\text{Alkutila: } d\mathbf{X} = dX^K \mathbf{G}_K = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \quad \text{Deformatunut tila: } d\mathbf{x} = dx^k \mathbf{g}_k,$$

Piola:

$$\text{Alkutila: } d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{G}^K, \quad \text{Deformatunut tila: } d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{g}^k = \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{X},$$

Finger:

$$\text{Alkutila: } d\mathbf{X} = dX_K \mathbf{G}^K = \mathbf{F}^T d\mathbf{x}, \quad \text{Deformatunut tila: } d\mathbf{x} = dx_k \mathbf{g}^k.$$

Pinta-alkioiden muodonmuutos

Truesdell ja Toupin [15] ovat esittäneet, kuinka Fingerin ja Piolan muodonmuutostensorit liittyvät pinta-alkioiden muodonmuutokseen. Haupt [5] puolestaan on tulkinnut ne pinta-alkioiden normaalien muutosten kuvaajiksi. Esitetään tässä Truesdellin ja Toupinin mukainen tulkinta. Nansonin kaavan (ks. [8]) mukaan alkutilan pinta-alkion $d\mathbf{A}$ ja deformatuneen tilan pinta-alkion $d\mathbf{a}$ välinen muunnos on

$$d\mathbf{a} = J \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}, \quad d\mathbf{A} = J^{-1} \mathbf{F}^T d\mathbf{a}. \quad (28)$$

J on deformaatiogradientin determinantti $J = \det \mathbf{F}$. Pinta-alkioiden neliöt ovat

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} = J^2 d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}, \quad d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = J^{-2} d\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \mathbf{F}^T d\mathbf{a}. \quad (29)$$

Edellä olevasta nähdään, että pinta-alkioiden neliöiden erotus on

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{A} \cdot (J^2 \mathbf{C}^{-1} - \mathbf{G}) d\mathbf{A}, \quad (30)$$

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = d\mathbf{a} \cdot (\mathbf{g} - J^{-2} \mathbf{b}) d\mathbf{a}. \quad (31)$$

Truesdell ja Toupin esittävät viiva-alkioita ja pinta-alkioita koskevan dualisuuslauseen ('Second principle of duality'), jonka sisältö on seuraava: Jos viiva-alkioiden muutoksia koskevissa yhtälöissä, jotka on lausuttu tensoreiden \mathbf{C} ja \mathbf{b}^{-1} avulla

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{C} - \mathbf{G}) d\mathbf{X},$$

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) d\mathbf{x},$$

sana 'viiva-alkio' ja tensorit \mathbf{C} ja \mathbf{b}^{-1} korvataan sanalla 'pinta-alkio' ja tensoreilla $J^2 \mathbf{C}^{-1}$ ja $J^{-2} \mathbf{b}$ niin saadaan pätevät yhtälöt.

Venymänopeudet

Johdetaan seuraavaksi Fingerin ja Piolan tensorien venymänopeudet. Piolan muodonmuutostensorin lausekkeesta (27) saadaan derivoimalla ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[-(\mathbf{F}^{-1}) \bullet \mathbf{F}^{-T} - \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{F}^{-T}) \bullet] = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-1} \mathbf{l} \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{F}^{-1} \mathbf{l}^T \mathbf{F}^{-T}) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) \mathbf{F}^{-T},$$

joten

$$\dot{\mathbf{A}} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{d} \mathbf{F}^{-T}. \quad (32)$$

Tensori \mathbf{l} on nopeustensori $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1}$ ja $\mathbf{d} = (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)/2$ venymänopeustensori.

Fingerin muodonmuutostensori (24) on lausuttu deformatiivisessa tilassa, joten kuvataan se ensin alkutilaan. Aluksi

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T - \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{U}^2 - \mathbf{R}^T \mathbf{g} \mathbf{R}) \mathbf{R}^T = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{E} \mathbf{R}^T.$$

\mathbf{E} on Greenin-Lagrangen muodonmuutostensori. Siirretään sitten tensori \mathbf{a} alkutilaan

$$\mathbf{E} = \mathbf{R}^T \mathbf{a} \mathbf{R}$$

ja derivoidaan ajan suhteen

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{a} + \mathbf{a} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T) \mathbf{R} = \mathbf{R}^T(\dot{\mathbf{a}} + \boldsymbol{\Omega}^{(R)T} \mathbf{a} + \mathbf{a} \boldsymbol{\Omega}^{(R)}) \mathbf{R}.$$

Antisymmetrinen tensori $\boldsymbol{\Omega}^{(R)}$ on rotaationopeus $\boldsymbol{\Omega}^{(R)} = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T$. Siirrytään sitten takaisin deformatiiviseen tilaan

$$\dot{\mathbf{a}}^c = \dot{\mathbf{a}} - \boldsymbol{\Omega}^{(R)} \mathbf{a} + \mathbf{a} \boldsymbol{\Omega}^{(R)} = \mathbf{R} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F} \mathbf{R}^T = \mathbf{v}^T \mathbf{d} \mathbf{v}. \quad (33)$$

Lauseke (33) on Fingerin tensorin konvektiivinen venymänopeus (ks. [8] s.66 ja 193).

Piolan ja Fingerin tensoreita vastaavat jännitykset

Jännitysten määrittämiseksi niiden tehot asetetaan yhtä suureksi deformatiivisen tilan jännitystehon $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV$ kanssa. Merkitään Piolan jännitystä $\mathbf{S}^P = S_{KL}^P \mathbf{G}^K \otimes \mathbf{G}^L$. Jännitysten teho on

$$\mathbf{S}^P : \dot{\mathbf{A}} \, dV_0 = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV = J \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{F} \dot{\mathbf{A}} \mathbf{F}^T \, dV_0 = J \operatorname{tr}(\mathbf{F} \dot{\mathbf{A}}^T \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma}) \, dV_0 = J \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} : \dot{\mathbf{A}} \, dV_0.$$

Nähdään, että Piolan muodonmuutostensoria vastaava jännitys lausuttuna Cauchyn jännityksen avulla on

$$\mathbf{S}^P = J \mathbf{F}^T \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F} = J \sigma_{kl} \mathbf{G}^k \otimes \mathbf{G}^l. \quad (34)$$

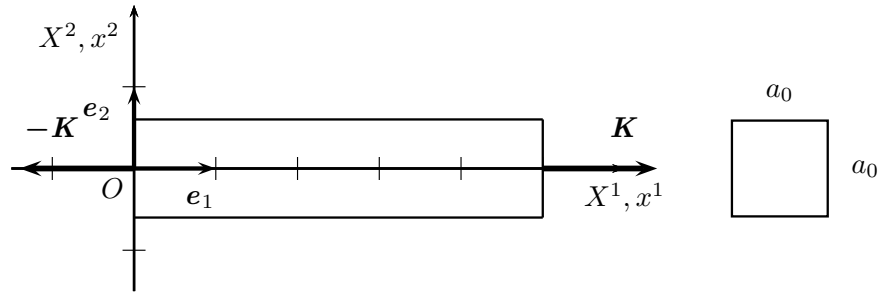
Tämä on samanmuotoinen kuin Greenin-Lagrangen venymää vastaava jännitys (Piolan-Kirchhoffin 2. jännitys), mutta tässä tapauksessa kovarianttien suureiden välillä.

Merkitään Fingerin jännitystä $\mathbf{T}^f = T_{kl}^f \mathbf{g}^k \otimes \mathbf{g}^l$. Jännitysten teholausekkeessa käytetään konvektiivista venymänopeutta

$$\mathbf{T}^f : \dot{\mathbf{a}}^c = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{v}^{-T} \dot{\mathbf{a}}^c \mathbf{v}^{-1} = \operatorname{tr}(\mathbf{v}^{-T} (\dot{\mathbf{a}}^c)^T \mathbf{v}^{-1} \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{v}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}^{-T} : \dot{\mathbf{a}}^c.$$

Fingerin muodonmuutostensoria vastaava jännitys on silloin Cauchyn jännityksen funktiona

$$\mathbf{T}^f = \mathbf{v}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}^{-T} = (v^{-1})_i^k \sigma^{ij} (v^{-1})_j^l \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l. \quad (35)$$



Kuva 2. Vedetty sauva.

Esimerkki 1. Vedetty sauva

Otaksutaan, että karteesisen koordinaatiston X^1 -akseli yhtyy sauvan akseliin. Kantavektoreita merkitään $\{\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^k\}$. Deformaatio on muotoa $x^1 = \lambda_1 X^1$, $x^2 = \lambda X^2$, $x^3 = \lambda X^3$, jossa positiiviset luvut λ_1 ja λ kuvaavat venytyksiä koordinaattiakselien suunnissa. Silloin deformaatiogradientti on $\mathbf{F} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \lambda \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 + \lambda \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}^3$. Polaarihajoittelman rotaatiotensori on yksikkötensori, joten $\mathbf{F} = \mathbf{U} = \mathbf{v}$, (kuva 2). Nopeusgradientti on $\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} = \dot{\lambda}_1 \lambda_1^{-1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + \dot{\lambda} \lambda^{-1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 + \lambda \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}^3) = \dot{\lambda}_1 \lambda_1^{-1} \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \dot{\lambda} \lambda^{-1} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \lambda \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)$.

Piolan ja Fingerin muodonmuutostensorit ovat kaavojen (27) ja (24) mukaan

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [(1 - \lambda_1^{-2}) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (1 - \lambda^{-2}) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)],$$

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} [(\lambda_1^2 - 1) \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + (\lambda^2 - 1) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3)].$$

Venymänopeudet ovat

$$\dot{\mathbf{A}} = \lambda_1^{-3} \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda^{-3} \dot{\lambda} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3),$$

$$\dot{\mathbf{a}} = \lambda_1 \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda \dot{\lambda} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3),$$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \lambda_1^{-1} \dot{\lambda}_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + \lambda^{-1} \dot{\lambda} (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \otimes \mathbf{e}_3).$$

Jännitystensorit ovat kaavojen (34) ja (35) mukaan

$$\mathbf{S}^P = J \lambda_1^2 \sigma_{11} \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \lambda^2 (\sigma_{22} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \sigma_{33} \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3),$$

$$\mathbf{T}^f = \lambda_1^{-2} \sigma_{11} \mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1 + \lambda^{-2} (\sigma_{22} \mathbf{e}^2 \otimes \mathbf{e}^2 + \sigma_{33} \mathbf{e}^3 \otimes \mathbf{e}^3).$$

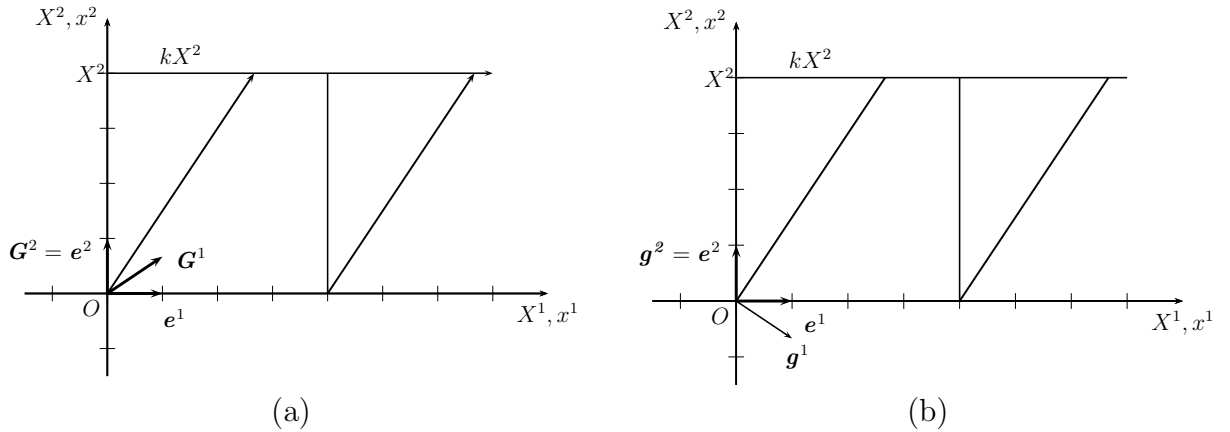
Tilavuussuhde J on $J = \lambda_1 \lambda^2$. Otaksutaan, että poikittaiset jännityskomponentit σ_{22} ja σ_{33} ovat nollia. Tällöin Piolan ja Fingerin venymämitoja vastaavat aksiaaliset jännitykset ovat

$$S_{11}^P = \lambda_1^3 \lambda^2 \sigma_{11}, \quad T_{11}^f = \lambda_1^{-2} \sigma_{11}.$$

Esimerkki 2. Yksinkertainen leikkaus

Tarkastellaan muodonmuutosta, jota kuvaa yhtälö

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 = (X^1 + kX^2) \mathbf{e}_1 + X^2 \mathbf{e}_2 + X^3 \mathbf{e}_3,$$



Kuva 3. Yksinkertainen leikkaus. (a) Konvektiiviset kantavektorit $\mathbf{G}^k = \mathbf{F}^T \mathbf{e}^k$ alkutilassa. (b) Konvektiiviset kantavektorit $\mathbf{g}^k = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{e}^k$ deformatiivisessa tilassa.

jossa k on positiivinen vakio. Kysymyksessä on $X^1 X^2$ -tasossa tapahtuva deformaatio, joten käsitellään sitä kaksidimensioisena. Suorakulmainen karteellinen koordinaatisto ja siihen kuuluva ortonormeerattu kanta $\{\mathbf{e}_k = \mathbf{e}^k\}$ valitaan sekä alku- että lopputilan kannaksi, jonka suhteen sekä venymät että jännitykset referoidaan (kuvat 3a ja b). Deformaatiogradientin lauseke on

$$\mathbf{F} = \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^1 + k \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}^2 \quad (36)$$

Konvektiivisen koordinaatiston kovariantit kantavektorit ovat

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{g}_2 = k \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2.$$

Kontravariantit vektorit ratkaistaan helposti yhtälöstä

$$[\mathbf{g}^1 \quad \mathbf{g}^2] = [\mathbf{g}_1 \quad \mathbf{g}_2]^{-T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix},$$

josta nähdään, että ne ovat

$$\mathbf{g}^1 = \mathbf{e}^1 - k \mathbf{e}^2, \quad \mathbf{g}^2 = \mathbf{e}^2.$$

Määritetään aluksi tavanomaiset muodonmuutosmitat, jotka saadaan suoraan deformaatiogradientin (36) avulla. Käytetään tensorien asemesta 2×2 -matriiseja, joiden alkiot referoidaan ortonormeeratun kannan $\{\mathbf{e}_k\}$ suhteen. Deformaatiogradientin matriisi, sen käänteismatriisi, nopeusgradientin ja venymänopeuden matriisi ovat

$$[\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{F}^{-1}] = \begin{bmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{l}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} 0 & \dot{k}/2 \\ \dot{k}/2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

Cauchyn-Greenin oikeanpuoleinen ja vasemmanpuoleinen muodonmuutostensori ovat

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{F}^T \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} 1 & k \\ k & 1 + k^2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{b}] = [\mathbf{F} \mathbf{F}^T] = \begin{bmatrix} 1 + k^2 & k \\ k & 1 \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Fingerin muodonmuutostensori \mathbf{a} (24) on tällöin

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{i}) = a^{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l, \quad [\mathbf{a}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} k^2 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}, \quad (39)$$

ja edelleen Piolan muodonmuutostensori \mathbf{A} (27) on

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) = A^{KL} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L, \quad [\mathbf{A}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -k^2 & k \\ k & 0 \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Venymänopeudet ovat kaavojen (33) ja (32) mukaan

$$[\dot{\mathbf{a}}^c] = [\dot{\mathbf{a}}] - [\boldsymbol{\Omega}^{(R)}][\mathbf{a}] + [\mathbf{a}][\boldsymbol{\Omega}^{(R)}] = \dot{k} \begin{bmatrix} -\tan \theta (1 + \sin^2 \theta) & (1 + 2 \sin^2 \theta)/2 \\ (1 + 2 \sin^2 \theta)/2 & -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (41)$$

ja

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1})^\bullet = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{dF}^{-1}, \quad [\dot{\mathbf{A}}] = \frac{\dot{k}}{2} \begin{bmatrix} -2k & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Tasotapauksessa rotaatiotensorin ja rotaationopeuden matriisit ovat

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad [\boldsymbol{\Omega}^{(R)}] = \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

θ on kiertymäkulma X^3 -akselin ympäri ja parametrin k ja θ :n välinen yhteys on $\tan \theta = -k/2$. Se seuraa Biot'n venymätensorin $\mathbf{U} = \mathbf{R}^T \mathbf{F}$ symmetriasta

$$[\mathbf{U}] = [\mathbf{R}^T \mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & k \cos \theta + \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta - k \sin \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & (1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Venytystensorin \mathbf{v} matriisi on

$$[\mathbf{v}] = [\mathbf{F} \mathbf{R}^T] = \begin{bmatrix} (1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Määritetään vielä sen käänteismatriisi

$$[\mathbf{v}]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & (1 + \sin^2 \theta)/\cos \theta \end{bmatrix}.$$

Fingerin muodonmuutostensoria vastaava jännitys Cauchyn jännityksen funktiona on kaavan (35) mukaan

$$[\mathbf{T}^f] = \begin{bmatrix} T_{11}^f & T_{12}^f \\ T_{21}^f & T_{22}^f \end{bmatrix} = [\mathbf{v}]^{-1} [\boldsymbol{\sigma}] [\mathbf{v}]^{-T}, \quad (45)$$

jossa jännityskomponenttien lausekkeet ovat

$$\begin{aligned} T_{11}^f &= \frac{1}{1 + (k/2)^2} [\sigma^{11} - (k/2)(\sigma^{12} + \sigma^{21}) + (k/2)^2 \sigma^{22}], \\ T_{12}^f &= \frac{k/2}{1 + (k/2)^2} \{-\sigma^{11} + (k/2)(\sigma^{12} + \sigma^{21}) - [1 + 2(k/2)^2] \sigma^{22}\} + \sigma^{12}, \\ T_{21}^f &= \frac{k/2}{1 + (k/2)^2} \{-\sigma^{11} + (k/2)(\sigma^{12} + \sigma^{21}) - [1 + 2(k/2)^2] \sigma^{22}\} + \sigma^{21}, \\ T_{22}^f &= \frac{1}{1 + (k/2)^2} \{(k/2)^2 \sigma^{11} - (k/2)[1 + 2(k/2)^2](\sigma^{12} + \sigma^{21}) + [1 + 2(k/2)^2]^2 \sigma^{22}\}. \end{aligned} \quad (46)$$

Piolan muodonmuutostensoria vastaava jännitys Cauchyn jännityksen avulla lausuttuna on kaavan (34) mukaan

$$[\mathbf{S}^P] = J[\mathbf{F}]^T[\boldsymbol{\sigma}][\mathbf{F}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & k\sigma_{11} + \sigma_{12} \\ k\sigma_{11} + \sigma_{21} & k^2\sigma_{11} + k(\sigma_{12} + \sigma_{21}) + \sigma_{22} \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Pinta-alkioiden muodonmuutos noudattaa kaavoja (30) ja (31). Esimerkiksi alkutilan pinta-alkion ollessa $d\mathbf{A} = h\mathbf{e}^2$ saadaan

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = h^2 - h^2 = 0,$$

joka esittää samalla X^1 -akselin suuntaisen viiva-alkion neliöiden erotusta Greenin-Lagrangen mukaan. Pinta-alkion ollessa $d\mathbf{A} = h\mathbf{e}^1$ saadaan

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = h^2k^2,$$

joka esittää myös X^2 -akselin suuntaisen viiva-alkion neliöiden erotusta Greenin-Lagrangen mukaan. Vastaavasti deformatiiviseen tilaan pinta-alkion ollessa $d\mathbf{a} = h\mathbf{e}^2$ saadaan

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = h^2 - h^2 = 0,$$

joka esittää samalla x^1 -akselin suuntaisen viiva-alkion neliöiden erotusta Almansin-Eulerin mukaan. Pinta-alkion ollessa $d\mathbf{a} = h\mathbf{e}^1$ saadaan

$$d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{a} - d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{A} = -h^2k^2,$$

joka esittää x^2 -akselin suuntaisen viiva-alkion neliöiden erotusta Almansin-Eulerin mukaan.

Yhteenveto

Artikkelissa on tarkasteltu Fingerin ja Piolan venymämittoja sekä niihin liittyviä jännitysmittoja. Ne on esitetty yli sata vuotta sitten, mutta niitä käytetään äärimmäisen harvoin teoreettisissa tarkasteluissa puhumattakaan sovelluksista. Tuloksia on havainnollistettu kahdella yksinkertaisella esimerkillä: vedetty sauva ja yksinkertainen leikkaus.

Viitteet

- [1] Y. Başar and D. Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids. Fundamental mathematical and physical concepts*. Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [2] A.C. Eringen. *Nonlinear theory of continuous media*. McGraw-Hill, 1962.
- [3] J. Finger. Das Potential der inneren Kräfte und die Beziehungen zwischen den Deformationen und den Spannungen in elastisch isotropen Körpern bei Berücksichtigung von Gliedern, die bezüglich der Deformationselemente von dritter, beziehungsweise zweiter Ordnung sind. *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 103:163–200, 1894.
- [4] J. Finger. Über die allgemeinsten Beziehungen zwischen endlichen Deformationen und den zugehörigen Spannungen in aelotropen und isotropen Substazen. *Sitzgsber. Akad. Wiss. Wien (IIa)*, 103:1073–1100, 1894.

- [5] P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer-Verlag, 2000.
- [6] H. Hencky. Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Zeitschrift für Technische Physik*, 9:215–220, 457, 1928.
- [7] R. Hill. Aspects of invariance in solid mechanics. *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 18:1–75, 1978.
- [8] G.A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics - A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons, 2000.
- [9] D.B. Macvean. Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, 19:157–185, 1968.
- [10] R.D. Mindlin. Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 1(4):417 – 438, 1965. ISSN 0020-7683. doi:[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(65\)90006-5](https://doi.org/10.1016/0020-7683(65)90006-5). URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768365900065>.
- [11] G. Piola. La meccanica de' corpi naturalmente estesi trattata col calcolo delle variazioni. *Opuscoli matematici e fisici di diversi autori*, pages 201–236, 1833.
- [12] G. Piola. Nuova analisi per tutte le questioni della meccanica molecolare. *Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze*, XXI:155–321, 1836.
- [13] G. Piola. Intorno alle equazione fondamentali del movimento di corpi qualsivogliono, considerati secondo la naturale loro forma e costituzione. *Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle scienze*, XXIV:1–186, 1848.
- [14] B.R. Seth. Generalized strain measure with applications to physical problems. In M. Reiner and D. Abir, editors, *Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics, IUTAM Symposium, Haifa, Israel, 23-27.4.1963*, 1964.
- [15] C. Truesdell and R.A. Toupin. *The Classical Field Theories*. S. Flügge ed., Encyclopedia of Physics, Volume III/1, Springer-Verlag, Berlin, 1960.

Martti Mikkola
Aalto-yliopisto
Insinööritieteiden korkeakoulu, Rakennustekniikan laitos
Rakentajanaukio 4 A, PL 12100, 00076 Aalto
martti.mikkola@aalto.fi