Rakenteiden Mekaniikka
Vol. 50, Nro 3, 2017, s. 357-361
https://rakenteidenmekaniikka.journal.fi/index
https:/doi.org/10.23998/rm.65122

VERTAISARVIOITU
KOLLEGIALT GRANSKAD
PEER-REVIEWED
www.tsv.fi/tunnus

Rakennejärjestelmän toisen asteen tekijöiden luotettavuusteoreettinen yhteisvaikutusanalyysi

Juhani Taipale

Tiivistelmä. Artikkeli esittelee uuden analysointimenetelmän, jonka avulla saadaan kartoitetuksi ne valitun rakennejärjestelmän primaarit perustekijät ja tekijäkombinaatiot, joiden luonne tulee ymmärtää tarkemmin pyrittäessä turvallisiin rakenneratkaisuihin. Samoin löydetään sekundaarit tekijät sekä tekijäkombinaatiot, joihin panostaminen on epätaloudellista. Näin muotoutuu rakennekokonaisuuksien eriasteisten vaikutustekijöiden priorisointi tavalla, joka takaa täsmälaatuvaatimusten kohdentumisen rakenneratkaisujen detaljitasolla vaaditun funktionaalisen potentiaalin maksimoimiseksi. Samalla se tuo esiin käytettävien suunnittelu- ja mitoitusmenetelmien mahdollisesti generoimat piilovarmuudet / täsmäkohdentamattomat epätaloudelliset ylipanostukset tai niiden epätarkkuuksista johtuvat varmennuspuutteet / kohdentamattomat riskit. Koko tarkastelun kannalta oleellista onkin se potentiaalinen mahdollisuus, että merkityksettömäksi katsottavien vaikutustekijöiden jokin käytännössä vaikeasti todennettava yhteisvaikutus voi yllättäen evoloitua merkittäväksi ääritilanteen hallitsemattomaksi riskitekijäksi.

Avainsanat: luotettavuusteoria, toisen asteen teoria, vaikutuskombinaatio, yhteisvaikutus

Vastaanotettu 1.7.2017. Hyväksytty 20.8.2017. Julkaistu verkossa 21.8.2017.

Tarkoitus ja tausta

Tämän kirjoituksen tarkoitus on esitellä uudentyyppinen analysointimenetelmä, jolla kartoitetaan ennalta valitun rakennejärjestelmän tiettyä vauriomekanismia vastaavien yhteisvaikutustekijöiden yksilöllinen luotettavuusteoreettinen merkitsevyys. Lähestymistapa on uusi ja tämä esitys perustuu matematiikan ohjaamiin askeliin. Varsinainen tarkastelu kohdistuu todellisista reaaliarvoisista satunnaismuuttujista, nk. perusmuuttujista koostuvaan toisen asteen satunnaisvektoriin $Z=(Z_1,\dots,Z_n)$ sekä rakennejärjestelmän tietyn murtotavan mukaista käyttäytymistä kuvaavaan Borelin funktioon, nk. vauriofunktioon g, jolla on ominaisuus

$$\begin{cases} g(z)>0 & \forall z\in A_+ \\ g(z)=0 & \forall z\in A_0 \\ g(z)<0 & \forall z\in A_- \end{cases}, \tag{1}$$

missä pistejoukko A_+ tarkoittaa rakenneratkaisun vauriotonta tilaa, A_- sen vaurioitunutta tilaa ja A_0 näiden joukkojen välistä rajapintaa, nk. vauriopintaa.

Lineaarisen vauriopinnan tapaus

Jos vauriopinta on muotoa

$$A_0 = \left\{ z \,\middle|\, a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i z_i = 0 \right\}, \tag{2}$$

määritellään Cornellin luotettavuusindeksi β_C [1] suoraan osamääränä

$$\beta_C = \frac{a_0 + a\mu_Z'}{\sqrt{a C_Z a'}}, \tag{3}$$

missä $\mu_Z = \left(E(Z_1),...,E(Z_n)\right)$, $a = (a_1,...,a_n)$ ja C_Z satunnaisvektorin Z kovarianssimatriisi.

Yleinen tapaus

Koska jokainen reaalialkioinen kovarianssimatriisi voidaan aina diagonalisoida ortogonaalisen matriisin avulla, voidaan satunnaisvektori Z muuntaa sellaiseksi satunnaisvektoriksi Y, jonka alkiot Y_i ($i = 1,\ldots,n$) ovat keskenään korreloimattomia satunnaismuuttujia. Näistä alkioista olkoon tasan p ($1 \le p \le n$) kappaletta todellisia satunnaismuuttujia, jotka normeerattuina muodostavat uuden satunnaisvektorin X.

Jos vauriofunktio $g : R^p \to R$ on differentioituva kuvaus vauriopinnan mielivaltaisessa pisteessä x', on varmuusmarginaalin linearisoitu lauseke esitettävissä muodossa

$$g_{FO}(X) = \nabla g(x') \cdot (X - x'), \tag{4}$$

joten saadaan

$$\begin{cases} E(g_{FO}(X)) = -\nabla g(x') \cdot x' \\ D^2(g_{FO}(X)) = \left|\nabla g(x')\right|^2 \end{cases} \tag{5}$$

ja lisäksi seurauksena

$$\left|\nabla g(x')\right| > 0 \quad \forall x' \in A_{0,X}. \tag{6}$$

Koska Cornellin alkuperäinen luotettavuusindeksimääritelmä on formaalisesti vastaava, on tässäkin tapauksessa mielekästä kirjoittaa:

$$\beta_{C,FO} = -\frac{x' \cdot \nabla g(x')}{\left|\nabla g(x')\right|}. \tag{7}$$

Jos valittu piste x' on lähinnä origoa oleva piste x^*, nk. suunnittelupiste, on tämän pisteen etäisyys origosta:

$$d_{\min} = \left|x^*\right| = \frac{\left|x^* \cdot \nabla g(x^*)\right|}{\left|\nabla g(x^*)\right|} = \left|\beta_{C,FO}\right|. \tag{8}$$

Tätä pisteeseen x^* kohdentuvaa suuretta kutsutaan Hasoferin ja Lindin luotettavuusindeksiksi [2].

Suunnittelupisteen määritys

Oletetaan, että vauriofunktio $g : R^p \to R$ on differentioituva kuvaus ja piste $x'' \in R^p$ sellainen, että

$$\left|\nabla g(x'')\right| > 0 . \tag{9}$$

Tällöin linearisoidun tasa-arvopinnan

$$T_{x''} = \left\{ x \middle| (x - x'') \cdot \nabla g(x'') = 0 \right\} \tag{10}$$

lähinnä origoa sijaitsevalla pisteellä x''' on esitysmuoto:

$$x''' = \frac{x''' \cdot \nabla g(x'')}{\left|\nabla g(x'')\right|^2} \nabla g(x'') . \tag{11}$$

Jos lisäys Δx on sellainen, että

$$g_{FO}(x''' + \Delta x) = 0 , \tag{12}$$

differentioituvuudesta

$$g_{FO}(x''' + \Delta x) - g_{FO}(x''') = \nabla g(x'') \cdot \Delta x + \left|\Delta x\right| \varepsilon(x''', \Delta x) , \tag{13}$$

kun

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \varepsilon(x''', \Delta x) = 0 , \tag{14}$$

seuraa, lisäyksen Δx ollessa riittävän pieni, tulos:

$$\Delta x \approx -\frac{g_{FO}(x''')}{\left|\nabla g(x'')\right|^2} \nabla g(x'') = -\frac{g(x'')}{\left|\nabla g(x'')\right|^2} \nabla g(x'') . \tag{15}$$

Siis iteraatiokaavalle saadaan muoto:

$$x^{(m+1)} = \frac{x^{(m)} \cdot \nabla g(x^{(m)}) - g(x^{(m)})}{\left|\nabla g(x^{(m)})\right|^2} \nabla g(x^{(m)}), \quad m \in N . \tag{16}$$

Rakennejärjestelmän yhteisvaikutusanalyysi

Koska esityksen varsinainen tarkoitus on siis esitellä itse analysointimenetelmä, tarkastellaan yksinkertaista teräksistä, hitsatusta I-profiilista muodostuvaa, keskeltä ja päistään vapaasti tuettua jatkuvaa kolmitukista palkkirakennetta, jota kuormittaa koko pituudeltaan pystysuora alaspäin suuntautunut tasainen vakiokuorma. Realistisemmat vaihtoehdot syntyvät muuttamalla tarkasteltavaa vauriofunktiota, kovarianssimatriisia ja tunnuslukujen yksilöllisiä vaihteluvälejä tarkastelutilannetta vastaavaksi, jolloin huomioituu myös reaalimaailman ilmentymät perussuureominaisuuksien satunnaisvaihteluiden epäedullisten kumuloitumisten osalta. Todettakoon vielä, että itse tarkastelu sisältää täsmälleen ne samat perusparametrit, kuin mielivaltainen multinormaalijakaumakin, jolla on keskeinen rooli monimuuttujamenetelmien teoriassa.

Valitussa tapauksessa taivutusmomentti- ja leikkausvoimarasitusten yhteisvaikutus maksimoituu keskituen kohdalla, joten ensimmäinen plastinen muodonmuutos syntyy, vaikutuksen voimistuessa riittävästi, tälle kohdalle. Vauriofunktion lauseke on muotoa

$$g(u_0) = 1 - \frac{M(u_0)}{M_p} - \frac{Q(u_0)}{Q_p} \tag{17}$$

aina, kun tarkastelukohta u_0 sijaitsee fyysisesti rakenteen kohdalla. Jos kapasiteettilausekkeiksi oletetaan

$$\begin{cases} M_p = Z_3 Z_6 Z_7 Z_8 \\ Q_p = Z_4 Z_6 Z_9 \end{cases}, \tag{18}$$

saa varmuusmarginaali muodon

$$g(Z) = \frac{3}{2} - \frac{(Z_1 + Z_2) Z_5^2}{8 Z_3 Z_6 Z_7 Z_8} - \frac{Z_3 Z_6 Z_7 Z_8}{2(Z_1 + Z_2) Z_5^2} - \frac{(Z_1 + Z_2) Z_3 Z_7 Z_8}{2 Z_4^2 Z_6 Z_9^2}, \tag{19}$$

missä Z_1 on omapaino, Z_2 hyötykuorma, Z_3 laipan myötöjännitys, Z_4 uuman myötöjännitys, Z_5 jänneväli, Z_6 palkin korkeus, Z_7 laipan leveys, Z_8 laipan paksuus ja Z_9 uuman paksuus. Tunnuslukujen vaihteluvälejä

$$\begin{cases} \Delta\mu_Z = ((0{,}025 \pm 0{,}010) MN/m, (0{,}0054 \pm 0{,}0022) MN/m, (420 \pm 60) MPa, \\ \qquad (400 \pm 60) MPa, (6{,}0 \pm 0{,}1) m, (0{,}34 \pm 0{,}04) m, (0{,}16 \pm 0{,}02) m, \\ \qquad (0{,}010 \pm 0{,}002) m, (0{,}0060 \pm 0{,}0006) m) \\ \Delta C_Z = diag((0{,}0025 \pm 0{,}0012) MN/m, (0{,}0032 \pm 0{,}0016) MN/m, \\ \qquad (29 \pm 15) MPa, (20 \pm 10) MPa, (0{,}06 \pm 0{,}03) m, (0{,}00068 \pm 0{,}00034) m, \\ \qquad (0{,}00080 \pm 0{,}00040) m, (0{,}000070 \pm 0{,}000035) m, (0{,}00012 \pm 0{,}00006) m) \end{cases} \tag{20}$$

vastaavat vaikutuskombinaatiokohtaiset $\beta_{C,FO}$-arvon variaatiot ovat taulukon 1 mukaiset.

Luokiteltaessa yksistään $\beta_{C,FO}$-tuloksen kannalta merkityksettömien tunnuslukumuutosten eritasoisten yhteisvaikutusten merkitykset, tulevat mm. seuraavat seikat tarkasteltaviksi.

- Jos päädytään luokitteluun, että vaikutus $D(Z_5)$ on vielä merkityksetön, tulee samalla tarkistaa, mikä on yhteisvaikutuksen $E(Z_4)\&D(Z_4)\&D(Z_5)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$ tilanne, koska ko. perusluokittelupäätös koskee tässä vaiheessa sellaisenaan vasta vaikutuksen $E(Z_5)$ $\beta_{C,FO}$-variaatiotasoa.
- Tarkastelutilanne on taivutusrasituksen dominoima (u_0~2,1m). Jos uuma on lokaalisti vaurioitunut tms. siten, että leikkausvoimakapasiteetti Q_p on puolittunut, muuttuu edellä tarkastellun yhteisvaikutuksen variaatiotulos arvosta 0,19 arvoon 0,29. Tällöin edellä todettu lisätarkistus on aiempaa oleellisempi.
- Samoin mm. luokittelurajatasoväli 0,7-1,0 osoittaa varsin moninaisesti yhteisvaikutusanalyysin tarpeellisuuden.

Taulukko 1. Vaikutuskombinaatioiden generoimat $\beta_{C,FO}$-variaatiot.

Vaikutustekijä	$\lvert\Delta\beta_{C,FO}\rvert$
$D(Z_3)$	3,8
$E(Z_3)$	3,2
$E(Z_1)$	3,1
$E(Z_8)$	2,9
$D(Z_1)\&E(Z_2)\&E(Z_4)\&D(Z_4)\&E(Z_5)\&D(Z_5)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	2,2
$E(Z_7)$	1,8
$E(Z_6)$	1,7
$D(Z_2)$	1,5
$E(Z_2)\&E(Z_4)\&D(Z_4)\&E(Z_5)\&D(Z_5)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	1,3
$D(Z_1)$	0,90
$E(Z_2)$	0,68
$E(Z_4)\&D(Z_4)\&E(Z_5)\&D(Z_5)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	0,67
$E(Z_5)$	0,48
$E(Z_4)\&D(Z_4)\&D(Z_5)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	0,19
$D(Z_5)$	0,13
$E(Z_4)\&D(Z_4)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	0,057
$D(Z_4)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_8)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	0,038
$D(Z_4)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&E(Z_9)\&D(Z_9)$	0,021
$E(Z_4)$	0,017
$D(Z_8)$	0,017
$E(Z_9)$	0,011
$D(Z_4)\&D(Z_6)\&D(Z_7)\&D(Z_9)$	0,010
$D(Z_7)$	0,0086
$D(Z_4)\&D(Z_6)\&D(Z_9)$	0,0014
$D(Z_6)$	0,0014
$D(Z_4)\&D(Z_9)$	0,000057
$D(Z_4)$	0,000049
$D(Z_9)$	0,0000078

Viitteet

[1] C. A. Cornell: A Probability-Based Structural Code, Journal of the American Concrete Institute (1969), Vol.66, No. 12, s. 974-985.

[2] A. M. Hasofer & N. C. Lind: Exact and Invariant Second-Moment Code Format, Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE (1974), Vol. 100, s. 111-121.

[3] J. Taipale: Rakenteellisen luotettavuusteorian matemaattiset perusteet sekä soveltaminen käytäntöön, Lisensiaatintyö (2000), Teknillinen korkeakoulu, Teknillisen fysiikan ja matematiikan osasto.

Juhani Taipale
Tampereen teknillinen yliopisto
Rakennustekniikka
PL 600
33101 Tampere
jtaipale@saunalahti.fi