

Taivutuksesta ja väännöstä, osa I: Teoria

Jukka Aalto

Tiivistelmä. Artikkelissa johdetaan kuormituksen alaiselle suoralle sauvalle yhdistetty taivutus- ja vääntöteoria. Jännityksille tehdään tyypilliset sauvateorian mukaiset otaksumat. Siirtymille käytetään otaksumaa, jossa tavanomaisia poikkileikkauksen jäykän kappaleen liikkeen mukaisia siirtymiä tarkennetaan aksiaalisen siirtymän osalta neljää käyritysfunktiota käyttäen. Käyritysfunktioiden määrittämiseksi poikkileikkauksen alueella johdetaan yksinkertaiset reuna-arvotekhtävät, jotka voidaan ratkaista numeerisesti esimerkiksi elementtimenetelmällä. Yhdistetyn taivutuksen ja väännön yhtälöt johdetaan virtuaalisen työn periaatetta käyttäen. Kehitettyä teoriaa voidaan pitää avointen ohutseinämäisten sauvojen taivutus- ja vääntöteorian yleistyksenä. Se soveltuu kaiken tyyppisille, myös useasta materiaalista koostuville, poikkileikkauksille ja ottaa huomioon leikkausmuodonmuutoksen vaikutuksen taipumaan.

Avainsanat: sauvateoria, taivutus, vääntö, leikkausmuodonmuutos, käyritysfunktio, reuna-arvotekhtävä, heikko muoto, elementtimenetelmä

Vastaanotettu 29.5.2017. Hyväksytty 24.6.2017. Julkaistu verkossa 14.12.2017.

1 Johdanto

Tässä artikkelissa esitetään perusteellisesti taivutus- ja vääntöteoria, jota kirjoittaja on aiemmin käsitellyt konferenssiartikkeleissa [1] ja [2]. Tilan puutteen vuoksi artikkeliin ei sisälly sovelluksia eikä esimerkkejä. Kirjoittajan on tarkoitus käsitellä näitä aiheita myöhemmin tässä lehdessä.

1.1 Otaksumia ja yhtälöitä

Tarkastellaan suoraa tasapaksua poikkileikkaukseltaan muuttumatonta sauvaa, jonka poikkileikkauksen pisteeseen on asetettu x, y, z -koordinaatisto siten, että x -akseli on palkin pituussuuntainen ja y, z -taso on poikkileikkaustason suuntainen. Tarkastelussa sovelletaan tavanomaisia sauvateorian jännityksiä koskevia otaksumia

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0. \quad (1)$$

Jatkossa tarvittavat muodonmuutosten ja siirtymien yhteydet ovat

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2)$$

ja jännitysotaksumia (1) vastaava Hooken laki saa muodon

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{yx} = G\gamma_{yx}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \quad (3)$$

Lisäksi tarvitaan sauvan yleisen pisteen differentiaalipalan tasapainoyhtälöitä (ilman massa-voimia), jotka ovat jännitysotaksumien (1) vallitessa muotoa

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

ja niitä vastaavia reunaehtoyhtälöitä palkin (kuormittamattomalla) sylinterimäisellä pitkittäis-reunalla ($n_x = 0$), joista ensimmäinen on

$$n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx} = 0 \quad (5)$$

ja kaksi muuta toteutuvat jännitysotaksumien (1) vallitessa automaattisesti.

1.2 Siirtymäotaksumat

Otaksumaan aluksi, että poikkileikkauksen siirtymä on jäykän kappaleen pienen liikkeen mukainen, jolloin ”tasot pysyvät tasoina”. Siirtopisteeksi poikkileikkauksen jäykän kappaleen liikkeessä otetaan tietty piste T, jota kutsutaan *vääntökeskiöksi* ja jonka sijainti valitaan jatkossa fysikaalisesti mielekkäällä tavalla. Siirtymäkomponenttien kinemaattiset lausekkeet ovat tällöin (liite A)

$$\begin{aligned} u_x^R(x, y, z) &= u_T(x) - \theta_z(x)(y - y_T) - \theta_y(x)(z - z_T), \\ u_y^R(x, y, z) &= v_T(x) - \theta_x(x)(z - z_T), \\ u_z^R(x, y, z) &= w_T(x) + \theta_x(x)(y - y_T). \end{aligned} \quad (6)$$

Suuret u_T , v_T ja w_T ovat vääntökeskiön siirtymäkomponentit ja θ_x , θ_y ja θ_z poikkileikkauksen (käsitettynä äärettömän ohueksi jäykäksi levyksi) pienet rotaatiot. Yläindeksi R viittaa tässä jäykän kappaleen (engl. rigid body) liikkeeseen. Lausekkeissa (6) osoittautuu tarkoituksenmukaiseksi käyttää vääntökeskiön T aksiaalisen siirtymän u_T sijasta poikkileikkauksen origon O aksiaalista siirtymää u_0 . Näiden välillä on yhteys

$$u_T = u_0 - \theta_z y_T - \theta_y z_T. \quad (7)$$

Kun vielä merkitään $u_0 = u$, $v_T = v$ ja $w_T = w$, siirtymäkomponenteille saadaan esitys

$$\begin{aligned} u_x^R(x, y, z) &= u(x) - \theta_z(x)y - \theta_y(x)z, \\ u_y^R(x, y, z) &= v(x) - \theta_x(x)(z - z_T), \\ u_z^R(x, y, z) &= w(x) + \theta_x(x)(y - y_T). \end{aligned} \quad (8)$$

Tunnetusti ”tasot pysyvät tasoina” mukainen otaksuma ei johda tyydyttävään tulokseen erityisesti väännön suhteen. Parannetaan siirtymäapproksimaatiota (8) sallimalla poikkileikkauksen käyristyä. Siirtymäapproksimaation tarkennettu muoto on nyt

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u_x^R(x, y, z) + \Delta u_x(x, y, z), \\ u_y(x, y, z) &= u_y^R(x, y, z), \\ u_z(x, y, z) &= u_z^R(x, y, z). \end{aligned} \quad (9)$$

Toisin sanoen jäykän kappaleen liikkeen mukaista approksimaatiota korjataan pelkistetysti vain komponentin u_x osalta. Tässä artikkelissa lisäsiirtymälle käytetään esitystä

$$\Delta u_x(x, y, z) = \theta'_x(x)\phi(y, z) + \theta'''_x(x)\psi_x(y, z) - \theta''_z(x)\psi_y(y, z) - \theta''_y(x)\psi_z(y, z), \quad (10)$$

missä funktioita $\phi(y, z)$, $\psi_x(y, z)$, $\psi_y(y, z)$ ja $\psi_z(y, z)$ kutsutaan *käyritysmisfunktioiksi* ja yläpilku merkitsee derivointia x :n suhteen. Esitystä (10) ei tässä yhteydessä tarkemmin perustella, mutta se osoittautuu tarkoituksenmukaisiksi. Kuitenkin voidaan todeta, että lausekkeen (10) ensimmäinen termi $\theta'_x(x)\phi(y, z)$ on muotoa, joka on käytössä Saint-Venantin vääntöteoriassa ([3] s. 293). Muut termit ovat sikäli saman tyyppisiä, että niissä rotaatiokomponenttien ”aksiaalisia derivaattoja” kertoo poikkileikkauksen koordinaattien y ja z funktio.

1.3 Paikalliset otaksumat

Suoritettaessa tiettyyn poikkileikkaukseen liittyviä paikallisia tarkasteluja otaksutaan, että palkin jännitysresultanttien tasapainoyhtälöissä (kaavat (44)) voidaan jakautunut kuormitus (kuormitukset $q_x(x)$, $q_y(x)$, $q_z(x)$, momenttikuormitukset $m_x(x)$, $m_y(x)$, $m_z(x)$) ja niin kutsuttu käyritysmismomenttikuormitus $b(x)$, jotka on määritelty kaavoilla (40)) jättää huomiotta. Näin esimerkiksi tasapainoyhtälöiden (44b) ja (44c) sijasta paikallisessa tarkastelussa voidaan käyttää yhtälöitä $Q_y = M'_z$ ja $Q_z = M'_y$. Edelleen otaksutaan, että paikallisesti tarkasteltavan poikkileikkauksen ympäristössä siirtymäapproksimaatioon liittyvät, pelkästään aksiaalisen koordinaatista x riippuvat suureet $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\theta_x(x)$, $\theta_y(x)$ ja $\theta_z(x)$, voidaan korvata niiden sopivaa astelukua olevilla polynomiapproksimaatioilla. Näin paikallisesti aksiaalinen siirtymä $u(x)$ on lineaarinen, poikittaiset siirtymät $v(x)$ ja $w(x)$ kuubisia, vääntökulma $\theta_x(x)$ kuubinen sekä rotaatiot $\theta_y(x)$ ja $\theta_z(x)$ kvadraattisia polynomeja. Valittuja astelukuja perustellaan luvussa 5. Tämän vuoksi tiettyyn poikki-leikkaukseen liittyvissä paikallisissa tarkasteluissa näiden funktioiden derivaatoille voidaan kirjoittaa

$$u''(x) = 0, v^{(4)}(x) = 0, w^{(4)}(x) = 0, \theta_x^{(4)}(x) = 0, \theta_y'''(x) = 0, \theta_z'''(x) = 0. \quad (11)$$

Näitä korkeammat derivaatat luonnollisesti häviävät. Tehdyt paikalliset otaksumat voivat tuntua melko mielivaltaisilta. Niiden tarkoituksena on kuitenkin vain synnyttää tyydyttävät edellytykset alunperin tuntemattomien funktioiden ϕ , ψ_x , ψ_y ja ψ_z määrittämiseksi. Eihän nämä funktiot sisältävä suure Δu_x ole myöskään muuta kuin puoli-intuitiivisesti valittu sopivalta tuntuva aksiaalinen siirtymätarkennus.

2 Käyritysmisfunktioiden määrittäminen

2.1 Siirtymät

Seuraavassa johdetaan reuna-arvotehtävät poikkileikkauksen käyritysmisfunktioiden määrittämiseksi. Tarkastelu tapahtuu nyt tietyssä poikkileikkauksessa, joten edellämaitut paikalliset otaksumat ovat voimassa. Tarkastelussa sovelletaan lisäsiirtymän lauseketta (10). Siirtymäkomponenttien lausekkeet (9) lopullisessa muodossaan ovat siis

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u(x) - \theta_z(x)y - \theta_y(x)z \\ &\quad + \theta'_x(x)\phi(y, z) + \theta'''_x(x)\psi_x(y, z) - \theta''_z(x)\psi_y(y, z) - \theta''_y(x)\psi_z(y, z), \\ u_y(x, y, z) &= v(x) - \theta_x(x)(z - z_T), \\ u_z(x, y, z) &= w(x) + \theta_x(x)(y - y_T). \end{aligned} \quad (12)$$

2.2 Muodonmuutokset ja jännitykset

Muodonmuutoskomponenteille (2) saadaan käyttäen lausekkeitä (12) ja ottamalla huomioon kaavat (11) lausekkeet

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u' - \theta'_z y - \theta'_y z + \theta''_x \phi, \\ \gamma_{yx} &= \theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z + z_T \right) + \theta''_x \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \gamma_y - \theta''_z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \theta''_y \frac{\partial \psi_z}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y - y_T \right) + \theta''_x \frac{\partial \psi_x}{\partial z} + \gamma_z - \theta''_z \frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \theta''_y \frac{\partial \psi_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (13)$$

missä on otettu käyttöön merkinnät

$$\gamma_y = v' - \theta_z, \quad \gamma_z = w' - \theta_y. \quad (14)$$

Suureita γ_y ja γ_z kutsutaan *keskimääräisiksi liukumiksi*.

Otetaan käyttöön uudet muunnetut käyritysfunktiot $\Phi(y, z)$, $\Psi_x(y, z)$, $\Psi_y(y, z)$ ja $\Psi_z(y, z)$, jotka pyritään määrittämään siten, että muodonmuutokset (13) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= u' - \theta'_z y - \theta'_y z + \theta''_x \phi, \\ \gamma_{yx} &= \theta'_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \theta''_x \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \theta''_z \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} - \theta''_y \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}, \\ \gamma_{zx} &= \theta'_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) + \theta''_x \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \theta''_z \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} - \theta''_y \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}.\end{aligned}\quad (15)$$

Näissä lausekkeissa venymän ε_x lauseke on säilytetty ennallaan, mutta liukumien γ_{xy} ja γ_{xz} lausekkeet ovat jatkotarkastelua silmälläpitäen huomattavasti yksinkertaisemmat. Niistä puuttuvat vääntökeskiön koordinaatit y_T ja z_T sekä keskimääräiset liukumien γ_y ja γ_z . Vertaamalla liukumien lausekkeitä (13) ja (15) liitteessä B on osoitettu, että alkuperäisillä käyritysfunktioilla ϕ , ψ_x , ψ_y , ψ_z ja muunnetuilla käyritysfunktiolla Φ , Ψ_x , Ψ_y , Ψ_z on seuraavat yhteydet

$$\begin{aligned}\phi(y, z) &= \Phi(y, z) + \Delta_\phi - z_T y + y_T z, \\ \psi_x(y, z) &= \Psi_x(y, z) + \Delta_{\psi_x}, \\ \psi_y(y, z) &= \Psi_y(y, z) + \Delta_{\psi_y} - c_{11} y - c_{21} z, \\ \psi_z(y, z) &= \Psi_z(y, z) + \Delta_{\psi_z} - c_{12} y - c_{22} z,\end{aligned}\quad (16)$$

missä Δ_ϕ , Δ_{ψ_x} , Δ_{ψ_y} , Δ_{ψ_z} , c_{11} , c_{12} , c_{21} ja c_{22} ovat vakioita. Vakiot Δ_ϕ , Δ_{ψ_x} , Δ_{ψ_y} ja Δ_{ψ_z} ilmaisevat alkuperäisten ja muunnettujen käyritysfunktioiden arvojen erotukset origon kohdalla (mikäli origo sijaitsee poikkileikkauksen alueella). Liitteessä C on osoitettu, että keskimääräisillä liukumilla γ_y , γ_z ja kiertymien toisilla derivaatoilla θ''_y , θ''_z on lineaariset yhteydet

$$\begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

ja esitetty kaava (C.3), jolla vakiot c_{11} , c_{12} , c_{21} ja c_{22} voidaan määrittää.

Jännityskomponenteille saadaan Hooken lain (3) ja muodonmuutosten lausekkeiden (15) avulla siis lausekkeet

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E(u' - \theta'_z y - \theta'_y z + \theta''_x \phi), \\
\tau_{yx} &= G[\theta'_x (\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z) + \theta''_x \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \theta''_z \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} - \theta''_y \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}], \\
\tau_{zx} &= G[\theta'_x (\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y) + \theta''_x \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} - \theta''_z \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} - \theta''_y \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}].
\end{aligned} \tag{18}$$

2.3 Reuna-arvotekävät käyritymisfunktioille

Sijoittamalla lausekkeet (18) jännityskomponenttien aksiaaliseen tasapainoyhtälöön (4a) ja vastaavaan reunaehtoyhtälöön (5) saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
\theta'_x \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [G(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z)] + \frac{\partial}{\partial z} [G(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y)] \right\} + \theta''_x \left[\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z}) + E\phi \right] \\
- \theta''_y \left[\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}) + Ez \right] - \theta''_z \left[\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}) + Ey \right] = 0,
\end{aligned} \tag{19}$$

ja

$$\begin{aligned}
\theta'_x \left[n_y G (\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z) + n_z G (\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y) \right] + \theta''_x \left(n_y G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) \\
- \theta''_y \left(n_y G \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) - \theta''_z \left(n_y G \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Sauvaan kohdistuvat mahdolliset kuormitukset aiheuttavat erilaisia arvoja suureille θ'_x , θ''_x , θ''_y ja θ''_z . Jotta yhtälöt (19) ja (20) toteutuisivat kaikilla mahdollisilla kuormituksilla, tulee niiden olla voimassa erikseen kaikilla arvoilla θ'_x , θ''_x , θ''_y ja θ''_z . Tällä perusteella saadaan käyritymisfunktioille seuraavat reuna-arvotekävät

$$\frac{\partial}{\partial y} [G(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z)] + \frac{\partial}{\partial z} [G(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y)] = 0 \text{ A : ssa,} \tag{21a}$$

$$n_y G (\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z) + n_z G (\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y) = 0 \text{ s : llä,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z}) + E\phi = 0 \text{ A : ssa,} \tag{21b}$$

$$n_y G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} = 0 \text{ s : llä,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_y}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_y}{\partial z}) + Ey = 0 \text{ A : ssa,} \tag{21c}$$

$$n_y G \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} = 0 \text{ s : llä,}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (G \frac{\partial \Psi_z}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (G \frac{\partial \Psi_z}{\partial z}) + Ez = 0 \text{ A : ssa,} \tag{21d}$$

$$n_y G \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} = 0 \text{ s : llä,}$$

missä A on poikkipinnan alue ja s sen reuna. Koska reuna-arvoprobleemissa (21) esiintyy vain tuntemattoman funktion derivaattoja, mutta ei itse funktiota, niiden ratkaisufunktiot ovat vakiota vailla yksikäsitteisiä. Yksikäsitteiseksi käyritysmisfunktiot saadaan vaatimalla niiden häviävän valitussa poikkipinnan pisteessä P_0 , jolle käytetään tässä nimitystä **nollapiste**. Ratkaistaessa reuna-arvoprobleemia (21) numeerisesti nollapisteeksi on luontevaa ottaa elementtiverkon solmu. Voidaan osoittaa, että nollapisteen valinta ei vaikuta esitettävällä teoriolla saataviin tuloksiin. Probleemilla (21a) ja (21b) on heikko kytkentä, koska funktio ϕ riippuu funktiosta Φ . Jos tehtävä (21a) ratkaistaan ensin, voidaan vakio Δ_Φ ja vääntökeskiön koordinaatit y_T ja z_T laskea kaavalla (53). Sen jälkeen saadaan funktio ϕ määritetyksi kaavalla (16a). Kun se on tunnettu, reuna-arvot tehtävä (21b) voidaan ratkaista.

2.4 Reuna-arvoprobleemien heikot muodot

Reuna-arvoprobleemien (21) numeerista ratkaisua formuloitaessa tarvitaan niiden heikkoja muotoja. Niistä on myös apua johdettaessa joitakin tämän artikkelin tuloksia. Liitteessä D on johdettu reuna-arvoprobleemien (21) heikot muodot. Ne ovat

$$\int_A G \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dA = 0, \quad (22a)$$

$$\int_A G \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_x \phi dA, \quad (22b)$$

$$\int_A G \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_y}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_y}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_y y dA, \quad (22c)$$

$$\int_A G \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_z}{\partial y} \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_z}{\partial z} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_z z dA. \quad (22d)$$

Näissä yhtälöissä $\hat{\Phi}(y, z)$, $\hat{\Psi}_x(y, z)$, $\hat{\Psi}_y(y, z)$ ja $\hat{\Psi}_z(y, z)$ ovat mielivaltaisia testifunktioita.

2.5 Poikittaisen tasapainon toteutuminen

Sijoittamalla lausekkeet (18b) ja (18c) jännityskomponenttien poikittaisten tasapainoyhtälöiden (4b) ja (4c) vasempiin puoliin ja ottamalla huomioon yhteydet (11) saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} &= G \theta_x'' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right), \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} &= G \theta_x'' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Havaitaan, että nämä tasapainoyhtälöt eivät toteudu. Niiden voidaan kyllä osoittaa toteutuvan koko poikkileikkauksessa keskimäärin. Integroimalla poikkipinnan yli saadaan

$$\begin{aligned} \int_A \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} dA &= \theta_x'' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) dA = 0, \\ \int_A \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dA &= \theta_x'' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) dA = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Viimeinen yhtäsuuruus saatiin soveltamalla heikkoa muotoa (22a), kun $\hat{\Phi} = y$ ja kun $\hat{\Phi} = z$. Todetaan, että tarkasteltavassa formulaatiossa jännityskomponenttien aksiaalinen tasapaino-

yhtälö (4a) toteutuu poikkileikkauksen kaikissa pisteissä, mutta poikittaiset tasapainoyhtälöt (4b) ja (4c) toteutuvat vain keskimäärin.

3 Jännitysresultantit ja niiden tasapainoyhtälöt

3.1 Reuna-arvot tehtävät sauvan siirtymille ja kiertymille

Jotta kaavoja (18) voitaisiin soveltaa tietyn poikkileikkauksen jännitysjakautumien määrittämiseksi, täytyy tuntea käyräisyfunktioiden $\Phi(y, z)$, $\Psi_x(y, z)$, $\Psi_y(y, z)$ ja $\Psi_z(y, z)$ lisäksi myös suureiden u' , θ'_x , θ''_x , θ'''_x , θ'_y , θ''_y , θ'_z ja θ''_z arvot poikkileikkauksen kohdalla. Tämä on mahdollista ainoastaan, jos kytetään formuloimaan palkin alueelle $x_1 < x < x_2$ reuna-arvot tehtävät, joiden avulla palkin pituuskoordinaatista x riippuvat funktiot: akselin siirtymä $u(x)$, vääntökeskiön siirtymät $v(x)$ ja $w(x)$ sekä poikkileikkauksen kiertymät $\theta_x(x)$, $\theta_y(x)$ ja $\theta_z(x)$ voidaan määrittää. Sauvateorioille tyypillisesti tulee määrittellä sopiva määrä jännitysresultantteja ja niitä vastaavia yleistettyjä muodonmuutoksia, jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt sekä jännitysresultanttien ja yleistettyjen muodonmuutosten väliset yhteydet.

3.2 Jännitysresultantit ja niiden tasapainoyhtälöt

Aluksi määritetään jännitysresultantit ja niiden tasapainoyhtälöt. Sovelletaan virtuaalisen työn periaatetta, jossa virtuaalinen siirtymätila valitaan kaavojen (9) mukaisesti. Virtuaalisen aksiaalisen siirtymän lisätermiksi ei kuitenkaan oteta koko lauseketta (10), vaan siihen sisällytetään vain sen ensimmäinen termi. Virtuaaliset siirtymät ovat

$$\begin{aligned}\delta u_x &= \delta u(x) - \delta \theta_z(x)y - \delta \theta_y(x)z + \delta \theta'_x \phi(y, z), \\ \delta u_y &= \delta v - \delta \theta_x(z - z_T), \\ \delta u_z &= \delta w + \delta \theta_x(y - y_T).\end{aligned}\quad (25)$$

Jatkossa osoittautuu, että tämä Saint-Venant henkinen esitys virtuaalisille siirtymille johtaa tarkoituksenmukaiseen lopputulokseen. Vastaavat virtuaaliset muodonmuutokset ovat

$$\begin{aligned}\delta \varepsilon_x &= \delta u' - \delta \theta'_z y - \delta \theta'_y z + \delta \theta''_x \phi, \\ \delta \gamma_{yx} &= \delta \gamma_y + \delta \theta'_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right), \\ \delta \gamma_{zx} &= \delta \gamma_z + \delta \theta'_x \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right).\end{aligned}\quad (26)$$

Palkin sisäisen virtuaalisen työn lauseke on

$$\delta W_{\text{int}} = - \int_{x_1}^{x_2} \left[\int_A (\delta \varepsilon_x \sigma_x + \delta \gamma_{yx} \tau_{yx} + \delta \gamma_{zx} \tau_{zx}) dA \right] dx. \quad (27)$$

Saadaan aluksi

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= - \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \delta u' \int_A \sigma_x dA - \delta \theta'_z \int_A \sigma_x y dA - \delta \theta'_y \int_A \sigma_x z dA + \delta \theta''_x \int_A \sigma_x \phi dA \right. \\ &\quad \left. + \delta \gamma_y \int_A \tau_{yx} dA + \delta \gamma_z \int_A \tau_{zx} dA + \delta \theta'_x \int_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \tau_{yx} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \tau_{zx} \right] dA \right\} dx.\end{aligned}\quad (28)$$

Muokataan viimeistä integraalia. Sovelletaan ensin yhteyttä (16a):

$$\begin{aligned} \int_A \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \tau_{yx} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \tau_{zx} \right] dA &\equiv a \\ &= \int_A \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \tau_{yx} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \tau_{zx} \right) dA + \int_A [-\tau_{yx}(z - z_T) + \tau_{zx}(y - y_T)] dA, \end{aligned} \quad (29)$$

sitten osittaisintegrointia:

$$a = \int_s \phi (n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}) ds - \int_A \phi \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) dA + \int_A [-\tau_{yx}(z - z_T) + \tau_{zx}(y - y_T)] dA \quad (30)$$

ja lopuksi tasapainoyhtälöä (4a) ja reunaehtoa (5):

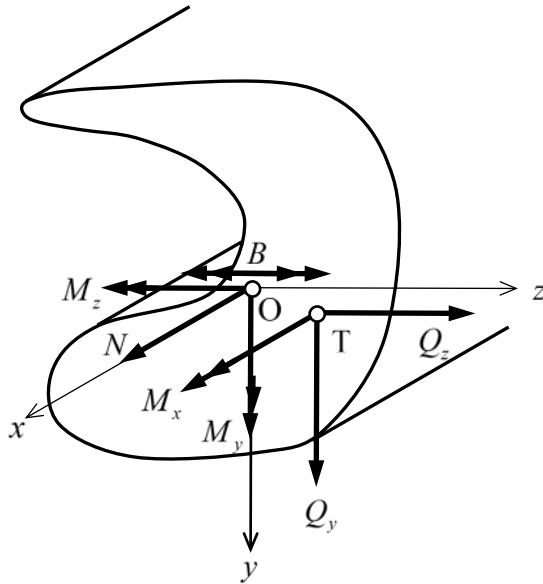
$$a = \int_A [-\tau_{yx}(z - z_T) + \tau_{zx}(y - y_T)] dA + \frac{\partial}{\partial x} \int_A \phi \sigma_x dA. \quad (31)$$

Sisäinen virtuaalinen työ saa näin muodon

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & - \int_{x_1}^{x_2} [\delta u' N - \delta \theta'_z M_z - \delta \theta'_y M_y \\ & + \delta \gamma_y Q_y + \delta \gamma_z Q_z + \delta \theta'_x (M_x - B') - \delta \theta''_x B] dx \end{aligned} \quad (32)$$

missä

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x dA, \quad M_z = \int_A \sigma_x y dA, \quad M_y = \int_A \sigma_x z dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{yx} dA, \quad Q_z = \int_A \tau_{zx} dA, \\ M_x &= \int_A [-\tau_{yx}(z - z_T) + \tau_{zx}(y - y_T)] dA, \quad B = - \int_A \sigma_x \phi dA. \end{aligned} \quad (33)$$



Kuva 1. Poikkileikkauksen jännitysresultantit ja niiden positiiviset suunnat

Lausekkeesta (32) nähdään, että formuloidun tehtävän yleistetyt muodonmuutokset ovat u' , $-\theta'_z$, $-\theta'_y$, γ_y , γ_z , θ'_x ja θ''_x sekä vastaavat jännitysresultantit ovat samassa järjestyksessä N , M_z , M_y , Q_y , Q_z , $M_x - B'$ ja B . Sauvan akselin venymä u' ja normaalivoima N liittyvät vetoon/puristukseen, käyritykset $-\theta'_z$, $-\theta'_y$ ja taivutusmomentit M_z , M_y sekä keskimääräiset liukumukset γ_y , γ_z ja leikkausvoimat Q_y , Q_z taivutukseen sekä vääntökulman

derivaatat θ'_x , θ''_x ja jännitysresultantit $M_x - B'$ ja B vääntöön. Vääntömomentti M_x on kaavan (33f) perusteella poikkileikkauksen leikkausjännitysten τ_{yx} ja τ_{zx} momentti erityisesti vääntökeskiön T suhteen. Suurelle B käytetään tässä nimitystä *käyritysmomentti*. Nimitys johtuu siitä, että sekin voidaan kaavan (33g) perusteella ymmärtää eräänlaiseksi normaali-jännityksen σ_x momentiksi, jossa momenttivartena on käyritysmisfunktio ϕ . Kuvassa 1 on esitetty poikkileikkauksen jännitysresultantit ja niiden positiiviset suunnat. Nuoli esittää voimaa, kaksoisnuoli momenttia ja kahdesta vastakkaisuuntaisesta kaksoisnuolesta koostuva symboli käyritysmomenttia. Avointen ohutseinämäisten sauvojen vääntöteoriassa (ks. liite F) esiintyy vastaava suure, jota kutsutaan bimomentiksi tai myös käyritysmomentiksi. Sen lauseke (F.12) eroaa lausekkeesta (33g) siinä, että integrandissa on käyritysmisfunktion $\phi(y, z)$ sijasta seinämän keskiviivalla s määritelty normeerattu sektoriaalinen koordinaatti $\omega_T(s)$ vääntökeskiön T suhteen (miinusmerkkisenä). Kuvassa 1 käytetty käyritysmomentin symboli ei liene käytössä. Se juontuu kirjallisuudessa esiintyvistä symbolista, joka koostuu kahdesta vastakkaisuuntaisesta kaarinuolesta (vrt. [4], s. 189, Kuva 10.4).

Jännitysresultanttien tasapainoyhtälöiden muodostamista silmälläpitäen muokataan sisäisen virtuaalisen työn lauseketta (32) edelleen. Ottamalla huomioon yhteydet $\delta\gamma_y = \delta v' - \delta\theta_z$ ja $\delta\gamma_z = \delta w' - \delta\theta_y$ saadaan

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_{x_1}^{x_2} [& -\delta u' N + \delta\theta'_z M_z + \delta\theta'_y M_y - \delta v' Q_y - \delta w' Q_z \\ & + \delta\theta_z Q_y + \delta\theta_y Q_z - \delta\theta'_x (M_x - B') + \delta\theta''_x B] dx \end{aligned} \quad (34)$$

Suorittamalla ensin osittaisintegrointi integrandin viimeiseen termiin liittyen saadaan

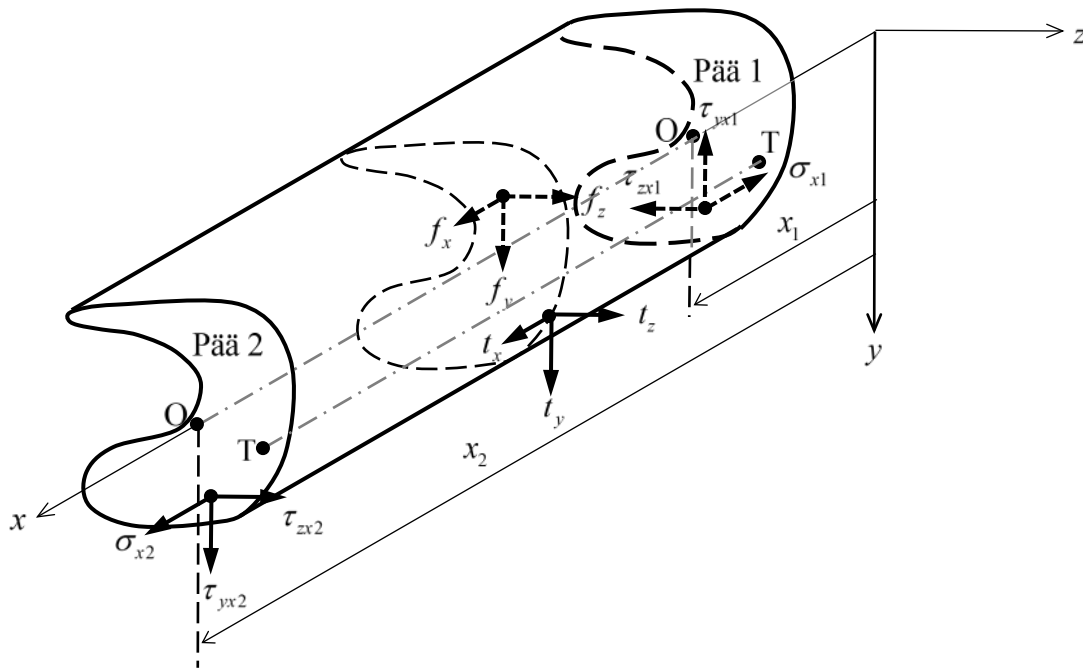
$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = \int_{x_1}^{x_2} (& -\delta u' N + \delta\theta'_z M_z + \delta\theta'_y M_y - \delta v' Q_y - \delta w' Q_z \\ & + \delta\theta_z Q_y + \delta\theta_y Q_z - \delta\theta'_x M_x) dx + \left. \delta\theta'_x B \right|_{x_1}^{x_2} \end{aligned} \quad (35)$$

Suorittamalla lisää osittaisintegrointeja saadaan

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & \int_{x_1}^{x_2} (\delta u N' - \delta\theta_z M'_z - \delta\theta_y M'_y + \delta v Q'_y + \delta w Q'_z + \delta\theta_z Q_y + \delta\theta_y Q_z + \delta\theta_x M'_x) dx \\ & + \left| (-\delta u N + \delta\theta_z M_z + \delta\theta_y M_y - \delta v Q_y - \delta w Q_z - \delta\theta_x M_x + \delta\theta'_x B) \right|_{x_1}^{x_2} \\ = & \int_{x_1}^{x_2} (\delta u N' - \delta\theta_z M'_z - \delta\theta_y M'_y + \delta v Q'_y + \delta w Q'_z + \delta\theta_z Q_y + \delta\theta_y Q_z + \delta\theta_x M'_x) dx \\ & + \delta u(x_1) N(x_1) - \delta u(x_2) N(x_2) \\ & - \delta\theta_z(x_1) M_z(x_1) + \delta\theta_z(x_2) M_z(x_2) - \delta\theta_y(x_1) M_y(x_1) + \delta\theta_y(x_2) M_y(x_2) \\ & + \delta v(x_1) Q_y(x_1) - \delta v(x_2) Q_y(x_2) + \delta w(x_1) Q_z(x_1) - \delta w(x_2) Q_z(x_2) \\ & + \delta\theta_x(x_1) M_x(x_1) - \delta\theta_x(x_2) M_x(x_2) \\ & - \delta\theta'_x(x_1) B(x_1) + \delta\theta'_x(x_2) B(x_2). \end{aligned} \quad (36)$$

Palkin ulkoiselle virtualiselle työlle voidaan kirjoittaa lauseke

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{ext}} = & \int_{x_1}^{x_2} \int_A [\delta u_x(x, y, z) f_x(x, y, z) + \delta u_y(x, y, z) f_y(x, y, z) + \delta u_z(x, y, z) f_z(x, y, z)] dA \\
& + \int_s [\delta u_x(x, s) t_x(x, s) + \delta u_y(x, s) t_y(x, s) + \delta u_z(x, s) t_z(x, s)] ds dx \\
& - \int_A [\delta u_x(x_1, y, z) \sigma_{x1}(y, z) + \delta u_y(x_1, y, z) \tau_{yx1}(y, z) + \delta u_z(x_1, y, z) \tau_{zx1}(y, z)] dA \\
& + \int_A [\delta u_x(x_2, y, z) \sigma_{x2}(y, z) + \delta u_y(x_2, y, z) \tau_{yx2}(y, z) + \delta u_z(x_2, y, z) \tau_{zx2}(y, z)] dA,
\end{aligned} \tag{37}$$



Kuva 2. Palkin osaan kohdistuvat pinta- ja tilavuusvoimat.

missä f_x , f_y ja f_z ovat tilavuusvoiman komponentit, t_x , t_y ja t_z palkin sylinterimäiseen pitkittäisreunaan kohdistuva kuormitus ilmaistuna traktiokomponentteina sekä σ_{xi} , τ_{yxi} , τ_{zxi} , $i = 1, 2$ sen päätypoikkileikkauksiin 1 ja 2 kohdistuva kuormitus ilmaistuna jännityskomponentteina. (Vaikka pitkittäisreuna otaksuttiin reunaehtoyhtälön (5) yhteydessä kuormittamattomaksi, tässä tarkastelussa, jonka tuloksena selviää muun muassa kuinka palkin pituutta kohti vaikuttava jakautunut kuormitus muotoutuu, tätä oletusta ei ole tarpeen tehdä.) Kaavoja (25) soveltaen saadaan

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{ext}} = & \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \delta u(x) \left[\int_A f_x(x, y, z) dA + \int_s t_x(x, s) ds \right] \right. \\
& - \delta \theta_z(x) \left[\int_A f_x(x, y, z) y dA + \int_A t_x(x, s) y(s) ds \right] \\
& - \delta \theta_y(x) \left[\int_A f_x(x, y, z) z dA + \int_A t_x(x, s) z(s) ds \right] \\
& + \delta \theta'_x(x) \left[\int_A f_x(x, y, z) \phi(y, z) dA + \int_A t_x(x, s) \phi(y(s), z(s)) ds \right] \\
& + \delta v(x) \left[\int_A f_y(x, y, z) dA + \int_s t_y(x, s) ds \right] + \delta w(x) \left[\int_A f_z(x, y, z) dA + \int_s t_z(x, s) ds \right] \\
& + \delta \theta_x(x) \left\{ \int_A [-f_y(x, y, z)(z - z_T) + f_z(x, y, z)(y - y_T)] dA \right. \\
& \quad \left. + \int_s [-t_y(x, s)(z(s) - z_T) + t_z(x, s)(y(s) - y_T)] ds \right\} dx \\
& - \delta u(x_1) \int_A \sigma_{x1} dA + \delta u(x_2) \int_A \sigma_{x2} dA \\
& + \delta \theta_z(x_1) \int_A \sigma_{x1} y dA - \delta \theta_z(x_2) \int_A \sigma_{x2} y dA + \delta \theta_y(x_1) \int_A \sigma_{x1} z dA - \delta \theta_y(x_2) \int_A \sigma_{x2} z dA \\
& - \delta \theta'_x(x_1) \int_A \sigma_{x1} \phi dA + \delta \theta'_x(x_2) \int_A \sigma_{x2} \phi dA \\
& - \delta v(x_1) \int_A \tau_{yx1} dA + \delta v(x_2) \int_A \tau_{yx2} dA - \delta w(x_1) \int_A \tau_{zx1} dA + \delta w(x_2) \int_A \tau_{zx2} dA \\
& - \delta \theta_x(x_1) \int_A [-\tau_{yx1}(z - z_T) + \tau_{zx1}(y - y_T)] dA \\
& + \delta \theta_x(x_2) \int_A [-\tau_{yx2}(z - z_T) + \tau_{zx2}(y - y_T)] dA
\end{aligned} \tag{38}$$

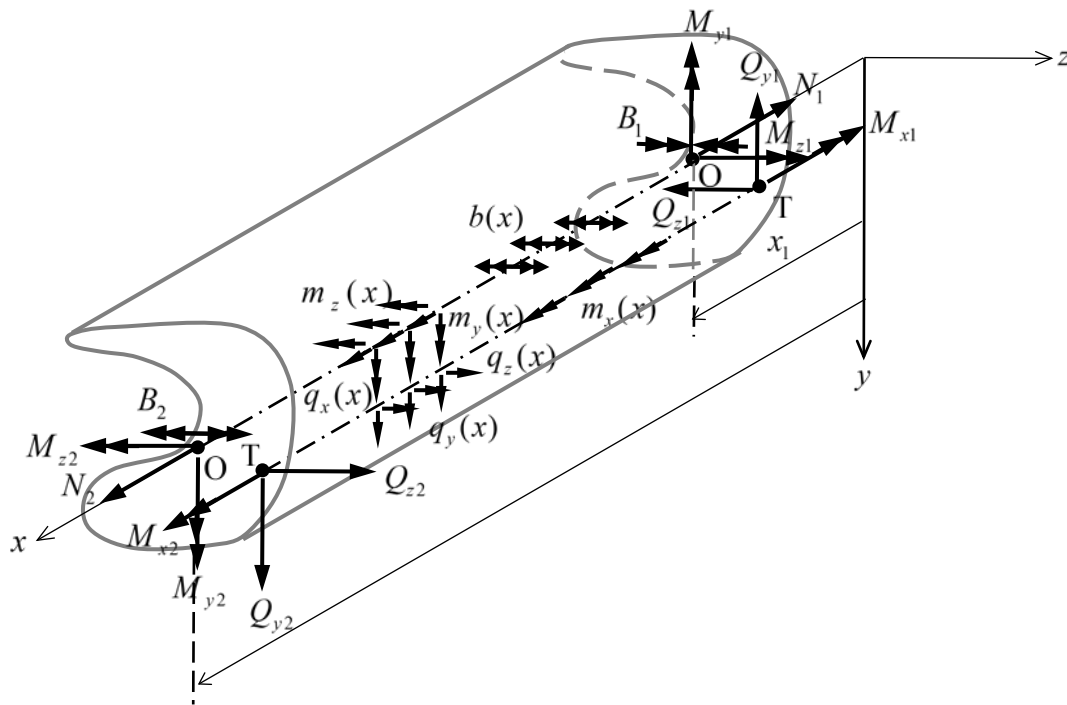
eli

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{ext}} = & \int_{x_1}^{x_2} [\delta u(x) q_x(x) - \delta \theta_z(x) m_z(x) - \delta \theta_y(x) m_y(x) - \delta \theta'_x(x) b(x) \\
& + \delta v(x) q_y(x) + \delta w(x) q_z(x) + \delta \theta_x(x) m_x(x)] dx \\
& - \delta u(x_1) N_1 + \delta u(x_2) N_2 \\
& + \delta \theta_z(x_1) M_{z1} - \delta \theta_z(x_2) M_{z2} \\
& + \delta \theta_y(x_1) M_{y1} - \delta \theta_y(x_2) M_{y2} \\
& + \delta \theta'_x(x_1) B_1 - \delta \theta'_x(x_2) B_2 \\
& - \delta v(x_1) Q_{y1} + \delta v(x_2) Q_{y2} \\
& - \delta w(x_1) Q_{z1} + \delta w(x_2) Q_{z2} \\
& - \delta \theta_x(x_1) M_{x1} + \delta \theta_x(x_2) M_{x2}
\end{aligned} \tag{39}$$

missä

$$\begin{aligned}
q_x &= \int_A f_x dA + \int_s t_x ds, & q_y &= \int_A f_y dA + \int_s t_y ds, & q_z &= \int_A f_z dA + \int_s t_z ds, \\
m_x &= \int_A [-f_y(z - z_T) + f_z(y - y_T)] dA + \int_s [-t_y(z - z_T) + t_z(y - y_T)] ds, \\
m_y &= \int_A f_x z dA + \int_s t_x z ds, & m_z &= \int_A f_x y dA + \int_s t_x y ds, & b &= -\int_A f_x \phi dA - \int_s t_x \phi ds, \\
N_i &= \int_A \sigma_{xi} dA, & M_{zi} &= \int_A \sigma_{xi} y dA, & M_{yi} &= \int_A \sigma_{xi} z dA, & B_i &= -\int_A \sigma_{xi} \phi dA, \\
Q_{yi} &= \int_A \tau_{yxi} dA, & Q_{zi} &= \int_A \tau_{zxi} dA, & M_{xi} &= \int_A [-\tau_{yxi}(z - z_T) + \tau_{zxi}(y - y_T)] dA.
\end{aligned} \tag{40}$$

Suureet $q_x(x)$, $q_y(x)$, $q_z(x)$, $m_x(x)$, $m_y(x)$ ja $m_z(x)$ ovat palkin pituutta kohti jakautuneen kuormituksen ja vääntökeskiöakselin suhteen lasketun jakautuneen momenttikuormituksen komponentit. Suuretta $b(x)$ kutsutaan tässä *jakautuneeksi käyritysmomenttikuormitukseksi*. Suureet N_i , M_{xi} , M_{yi} , M_{zi} , Q_{yi} , Q_{zi} , B_i $i=1,2$ ovat normaalivoiman, vääntömomentin, taivutusmomenttien, leikkausvoimien ja käyritysmomentin arvot palkin päissä 1 ja 2.



Kuva 3. Palkin osaan kohdistuvat yleistetyt voimat.

Suoritetaan vielä lausekkeen (39) integraalin integrandin neljänteen termiin liittyvä osittais-integrointi, jolloin saadaan

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{ext}} = & \int_{x_1}^{x_2} \{ \delta u(x) q_x(x) - \delta \theta_z(x) m_z(x) - \delta \theta_y(x) m_y(x) \\
& + \delta v(x) q_y(x) + \delta w(x) q_z(x) + \delta \theta_x(x) [m_x(x) + b'(x)] \} dx \\
& - \delta u(x_1) N_1 + \delta u(x_2) N_2 \\
& + \delta \theta_z(x_1) M_{z1} - \delta \theta_z(x_2) M_{z2} + \delta \theta_y(x_1) M_{y1} - \delta \theta_y(x_2) M_{y2} \\
& + \delta \theta'_x(x_1) B_1 - \delta \theta'_x(x_2) B_2 \\
& - \delta v(x_1) Q_{y1} + \delta v(x_2) Q_{y2} - \delta w(x_1) Q_{z1} + \delta w(x_2) Q_{z2} \\
& - \delta \theta_x(x_1) [M_{x1} - b(x_1)] + \delta \theta_x(x_2) [M_{x2} - b(x_2)].
\end{aligned} \tag{41}$$

Virtuaalisen työn periaate

$$\delta W_{\text{int}} + \delta W_{\text{ext}} = 0 \tag{42}$$

antaa yhtälön

$$\begin{aligned}
& \int_{x_1}^{x_2} [\delta u(N' + q_x) - \delta \theta_z(M'_z - Q_y + m_z) - \delta \theta_y(M'_y - Q_z + m_y) \\
& + \delta v(Q'_y + q_y) + \delta w(Q'_z + q_z) + \delta \theta_x(M'_x + m_x + b')] dx \\
& + \delta u(x_1) [N(x_1) - N_1] - \delta u(x_2) [N(x_2) - N_2] \\
& - \delta \theta_z(x_1) [M_z(x_1) - M_{z1}] + \delta \theta_z(x_2) [M_z(x_2) - M_{z2}] \\
& - \delta \theta_y(x_1) [M_y(x_1) - M_{y1}] + \delta \theta_y(x_2) [M_y(x_2) - M_{y2}] \\
& + \delta v(x_1) [Q_y(x_1) - Q_{y1}] - \delta v(x_2) [Q_y(x_2) - Q_{y2}] \\
& + \delta w(x_1) [Q_z(x_1) - Q_{z1}] - \delta w(x_2) [Q_z(x_2) - Q_{z2}] \\
& + \delta \theta_x(x_1) [M_x(x_1) - M_{x1} + b(x_1)] - \delta \theta_x(x_2) [M_x(x_2) - M_{x2} + b(x_2)] \\
& - \delta \theta'_x(x_1) [B(x_1) - B_1] + \delta \theta'_x(x_2) [B(x_2) - B_2] = 0.
\end{aligned} \tag{43}$$

Virtuaalisen työn periaatteen yhteydessä tunnettuun tapaan voidaan yhtälön (43) perusteella johtaa seuraavat yhtälöt: Jännitysresultanttien differentiaaliset tasapainoyhtälöt

$$\begin{aligned}
N' + q_x &= 0, \\
M'_z - Q_y + m_z &= 0, \quad M'_y - Q_z + m_y = 0, \quad Q'_y + q_y = 0, \quad Q'_z + q_z = 0, \\
M'_x + m_x + b' &= 0,
\end{aligned} \tag{44}$$

jotka ovat voimassa palkin alueella $x_1 < x < x_2$. Kinemaattiset reunaehdot

$$\begin{aligned}
u(x_i) &= u_i, \\
\theta_z(x_i) &= \theta_{zi}, \quad \theta_y(x_i) = \theta_{yi}, \quad v(x_i) = v_i, \quad w(x_i) = w_i, \\
\theta_x(x_i) &= \theta_{xi}, \quad \theta'_x(x_i) = \theta'_{xi}
\end{aligned} \tag{45}$$

ja niitä vastaavat kineettiset reunaehdot

$$\begin{aligned}
N(x_i) &= N_i, \\
M_z(x_i) &= M_{zi}, \quad M_y(x_i) = M_{yi}, \quad Q_y(x_i) = Q_{yi}, \quad Q_z(x_i) = Q_{zi}, \\
M_x(x_i) &= M_{xi} - b(x_i), \quad B(x_i) = B_i,
\end{aligned} \tag{46}$$

jotka ovat voimassa palkin päissä $i = 1$ ja 2 . Kustakin toisiaan vastaavasta kinemaattisesta ja kineettisestä reunaehdosta tulee olla voimassa jompi kumpi.

Virtuaalisen työn periaatetta käyttäen saatiin siis muodostettua palkin jännitysresultit (33), kuormituksen määrittely (40), jännitysresultanttien differentiaaliset tasapainoyhtälöt (44) sekä

kinemaattiset ja kineettiset reunaehtotyypit (45) ja (46). Kaavojen (44), (45) ja (46) ylimmäiset yhtälöt liittyvät vetoon/puristutukseen, keskimmäiset taivutukseen ja alimmat vääntöön. Jos sovelletaan jäykän kappaleen tasapainoehtoja differentiaaliseseen sauva-alkioon, saadaan tulokseksi differentiaaliset tasapainoyhtälöt, jotka poikkeavat yhtälöistä (44) siinä, että viimeisestä (44f) puuttuu termi b' . Ilman energiataarkastelua jää myös reunaehtoyhtälöstä (46f) termi $b(x_i)$ pois. Näin menetellen jää käyritysmomenttikuormitus $b(x)$ käsitteenä ja sen vaikutus yhtälöihin (44) ja (46) tarkastelusta pois. Käyritysmomenttikuormitus $b(x)$ on kuitenkin vaikutukseltaan vähäinen.

4 Jännitysresultanttien ja yleistettyjen muodonmuutosten yhteydet

Tavoitteena on nyt lausua tehtävän jännitysresultantit niitä vastaavien yleistettyjen muodonmuutosten avulla. Kysymyksessä on tiettyyn poikkileikkaukseen liittyvä paikallinen tarkastelu, jonka yhteydessä voidaan soveltaa kohdan 1.3 mukaisia paikallisia otaksimia.

4.1 Normaalivoima, taivutusmomentit ja käyritysmomentti

Käyttäen normaalivoiman, taivutusmomenttien ja käyritysmomentin määrittelykaavoja (33a), (33b), (33c) ja (33g) sekä normaalijännityksen lauseketta (18a) saadaan

$$\begin{aligned} N &= EAu' - ES_y\theta'_y - ES_z\theta'_z + ES_\phi\theta''_x, \\ M_y &= ES_yu' - EI_y\theta'_y - EI_{yz}\theta'_z + EI_{y\phi}\theta''_x, \\ M_z &= ES_zu' - EI_{yz}\theta'_y - EI_z\theta'_z + EI_{z\phi}\theta''_x, \\ B &= -ES_\phi u' + EI_{y\phi}\theta'_y + EI_{z\phi}\theta'_z - EI_\phi\theta''_x, \end{aligned} \quad (47)$$

missä

$$\begin{aligned} EA &= \int_A E dA, \quad ES_y = \int_A Ez dA, \quad ES_z = \int_A Ey dA, \quad ES_\phi = \int_A E\phi dA, \\ EI_y &= \int_A Ez^2 dA, \quad EI_z = \int_A Ey^2 dA, \quad EI_{yz} = \int_A Eyz dA, \\ EI_{y\phi} &= \int_A Ez\phi dA, \quad EI_{z\phi} = \int_A Ey\phi dA, \quad EI_\phi = \int_A E\phi^2 dA. \end{aligned} \quad (48)$$

Jännitysresultanttien ja yleistettyjen muodonmuutosten yhteyksien (47) kertoimille käytetään tässä kaksikirjaimisia symboleja, kuten sauvateorian esityksissä usein menetellään. Jos poikkileikkaus on homogeeninen ja kimmomoduuli E vakio, se voidaan ottaa integraalin ulkopuolelle. Tällöin kirjainyhdistelmä ymmärretään kimmomoduulin E ja sitä seuraavan integraalin (poikkileikkauksen geometrisen suureen) tuloksi. Esimerkiksi aksiaalijäykkyys EA on kimmomoduulin E ja poikkipinnan alan A tulo, kimmomoduulilla painotettu staattinen momentti ES_z kimmomoduulin E ja staattisen momentin S_z tulo ja taivutusjäykkyys EI_z on kimmomoduulin E ja jäyhyysmomentin I_z tulo. Suurelle EI_ϕ käytetään nimitystä *käyritysmisjäykkyys* ja homogeenisen poikkileikkauksen suurelle I_ϕ *käyritysmisjäyhyysmomentti*. Avointen ohutseinämäisten sauvojen vääntöteoriassa yhteydet (47) ovat samanmuotoiset. Suureita ES_ϕ , $EI_{y\phi}$, $EI_{z\phi}$ ja EI_ϕ vastaa, kun kysymyksessä on homogeeninen poikkileikkaus, tulot ES_ω , $EI_{y\omega}$, $EI_{z\omega}$ ja EI_ω , missä S_ω on sektoriaalinen staattinen momentti, $I_{y\omega}$ ja $I_{z\omega}$ ovat sektoriaaliset tulomomentit sekä I_ω on sektoriaalinen jäyhyysmomentti (vrt. liitteen F kaavat (F.4)), jotka on määritetty käyttäen poikkileikkauksen normeerattua sektoriaalista koordinaattia ω_T vääntökeskiön suhteen.

Menetellään ensin kuten tavallisesti sauvateoriassa. Asetetaan y, z –koordinaatiston origo O poikkileikkauksen vetojäykkyysskeskiöön, jolloin

$$ES_y = 0, \quad ES_z = 0. \quad (49)$$

Koordinaattiakselien suunnat voitaisiin myös asettaa yhtymään poikkileikkauksen pääjäykkyyksien suuntiin, jolloin

$$EI_{yz} = 0. \quad (50)$$

Näin ei kuitenkaan tässä yhteydessä tehdä, koska siitä ei ole sanottavaa hyötyä. Määritetään sitten yhtälön (16a) vakio Δ_Φ ja vääntökeskiön T koordinaatit y_T ja z_T siten, että jäykkyydet ES_ϕ , $EI_{y\phi}$ ja $EI_{z\phi}$ häviävät. Kaavojen (48), (16a) ja (49) perusteella saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} ES_\phi &\equiv \int_A E\phi dA = ES_\Phi + \Delta_\Phi EA = 0, \\ EI_{y\phi} &\equiv \int_A Ez\phi dA = EI_{y\Phi} - z_T EI_{yz} + y_T EI_y = 0, \\ EI_{z\phi} &\equiv \int_A Ey\phi dA = EI_{z\Phi} - z_T EI_z + y_T EI_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

missä

$$ES_\Phi = \int_A E\Phi dA, \quad EI_{y\Phi} = \int_A Ez\Phi dA, \quad EI_{z\Phi} = \int_A Ey\Phi dA. \quad (52)$$

Yhtälöiden (51) ratkaisu on

$$\Delta_\Phi = -\frac{ES_\Phi}{EA}, \quad \begin{Bmatrix} y_T \\ z_T \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI_y EI_z - EI_{yz}^2} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -EI_{y\Phi} \\ EI_{z\Phi} \end{Bmatrix}. \quad (53)$$

Kun käyritysmisfunktio $\Phi(y, z)$, jonka nollapiste on P_0 , on määritetty reuna-arvottehtävän (21a) ratkaisuna, voidaan vakio Δ_Φ ja vääntökeskiön koordinaatit y_T ja z_T määrittää kaavoilla (53). Tämän jälkeen käyritysmisfunktio $\phi(y, z)$ voidaan määrittää kaavaa (16a) käyttäen. Kun se tunnetaan, voidaan määrittää käyritysmisjäykkyys EI_ϕ . Avointen ohutseinämäisten sauvojen teoriassa esiintyy analoginen prosessi, jota on kuvattu liitteessä F. Siinä käyritysmisfuntiota $\Phi(y, z)$ vastaa sektoriaalinen koordinaatti $\Omega_0(s)$ origon suhteen, jonka nollapiste on P_0 , kaavoja (53) vastaa kaavat (F.11) ja (F.10), Käyritysmisfuntiota $\phi(y, z)$ vastaa normeerattu sektoriaalinen koordinaatti $\omega_T(s)$ vääntökeskiön T suhteen, joka määritetään kaavaa (16a) vastaavalla kaavalla (F.9). Normeerattua sektoriaalista koordinaattia $\omega_T(s)$ käyttäen voidaan sitten määrittää sektoriaalinen jäyhyysmomentti I_ω kaavalla (F4d).

Jännitysresultanttien ja yleistettyjen muodonmuutosten yhteydet (47) yksinkertaistuvat nyt seuraaviksi

$$\begin{aligned} N &= EAu', \\ \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix} &= - \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \theta'_y \end{Bmatrix}, \\ B &= -EI_\phi \theta''_x. \end{aligned} \quad (54)$$

Näissä lausekkeissa normaalivoima riippuu vain akselin venymästä, taivutusmomentit riippuvat vain käyritysmistä ja käyritysmismomentti vain vääntökulman toisesta derivaatasta. Näin kytkennät, jotka lausekkeissa (47) olivat veto/puristus-, taivutus- ja vääntötehtävän välillä, on saatu hävitettyä.

4.2 Leikkausvoimat

Käyttäen leikkausvoimien määrittelykaavoja (33d) ja (33e) sekä leikkausjännitysten lausekkeitä (18b) ja (18c) saadaan

$$\begin{aligned}
 Q_y &= -\theta_z'' \int_A G \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} dA - \theta_y'' \int_A G \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} dA + \theta_x' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) dA + \theta_x''' \int_A G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} dA \\
 &= -\theta_z'' \int_A E y^2 dA - \theta_y'' \int_A E y z dA + \theta_x''' \int_A E y \phi dA = -EI_z \theta_z'' - EI_{yz} \theta_y'' + EI_{z\phi} \theta_x''' \\
 &= -EI_z \theta_z'' - EI_{yz} \theta_y'', \\
 Q_z &= -\theta_z'' \int_A G \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} dA - \theta_y'' \int_A G \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} dA + \theta_x' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) dA + \theta_x''' \int_A G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} dA \\
 &= -\theta_z'' \int_A E y z dA - \theta_y'' \int_A E z^2 dA + \theta_x''' \int_A E z \phi dA = -EI_{yz} \theta_z'' - EI_y \theta_y'' + EI_{y\phi} \theta_x''' \\
 &= -EI_{yz} \theta_z'' - EI_y \theta_y''.
 \end{aligned} \tag{55}$$

Sovellettiin heikon muodon yhtälöitä (22), joissa ensin $\hat{\Phi} = y$, $\hat{\Psi}_x = y$, $\hat{\Psi}_y = y$, $\hat{\Psi}_z = y$ ja sitten $\hat{\Phi} = z$, $\hat{\Psi}_x = z$, $\hat{\Psi}_y = z$, $\hat{\Psi}_z = z$, sekä otettiin lopuksi huomioon yhteydet (51b) ja (51c). Derivoimalla taivutusmomenttien lausekkeet (54b) nähdään, että yhtälöistä (55) seuraa leikkausvoimille tulokset

$$Q_y = M_z', \quad Q_z = M_y'. \tag{56}$$

Nämä lausekkeet ovat tasapainoyhtälöiden (44b) ja (44c) paikallisesti voimassa olevat versiot, joissa $m_y = 0$ ja $m_z = 0$. Koska leikkausvoimien lausekkeet (55) sisältävät saman informaation kuin jännitysresultanttien tasapainoyhtälöt, ei niitä voida käyttää jännitysresultanttien ja yleistettyjen muodonmuutosten yhteyksinä.

Leikkausvoimien lausekkeet (55) muodostettiin integroimalla leikkausjännitysten lausekkeet (18b) ja (18c), jotka perustuivat siirtymäapproksimaation (9) lisäsiirtymän lausekkeeseen (10). Menetellään nyt niin, että lisäsiirtymäksi ei oteta koko lauseketta (10), vaan sen kaksi ensimmäistä termiä. Leikkausjännityksiksi tässä tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned}
 \tau_{yx} &= G \left[\gamma_y + \theta_x' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \theta_x''' \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right], \\
 \tau_{zx} &= G \left[\gamma_z + \theta_x' \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) + \theta_x''' \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right].
 \end{aligned} \tag{57}$$

Käyttäen leikkausvoimien määrittelykaavoja (33d) ja (33e) sekä leikkausjännitysten lausekkeitä (57) saadaan

$$\begin{aligned}
 Q_y &= \gamma_y \int_A G dA + \theta_x' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) dA + \theta_x''' \int_A G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} dA = \gamma_y \int_A G dA + \theta_x''' \int_A E y \phi dA \\
 &= GA \gamma_y + EI_{z\phi} \theta_x''' = GA \gamma_y, \\
 Q_z &= \gamma_z \int_A G dA + \theta_x' \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) dA + \theta_x''' \int_A G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} dA = \gamma_z \int_A G dA + \theta_x''' \int_A E z \phi dA \\
 &= GA \gamma_z + EI_{y\phi} \theta_x''' = GA \gamma_z,
 \end{aligned} \tag{58}$$

missä

$$GA = \int_A G dA \tag{59}$$

on leikkausjäykkyys, joka homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa on liukumoduulin G ja poikkipinnan alan A tulo. Sovellettiin heikon muodon yhtälöitä (22a) ja (22b), joissa ensin $\hat{\Phi} = y$, $\hat{\Psi}_x = y$ ja sitten $\hat{\Phi} = z$, $\hat{\Psi}_x = z$, sekä otettiin lopuksi huomioon yhteydet (51b) ja (51c). Yhteydet (58) leikkausvoimien Q_y ja Q_z sekä keskimääräisten liukumien γ_y ja γ_z välillä ovat varsin pelkistetyt ja niitä pyritään siksi parantamaan. Vastaavassa tilanteessa yksiakselisen taivutuksen Timoshenko palkkiteoriassa [5] (x, y -tasossa, jolloin $Q = Q_y$ ja $\gamma = \gamma_y$) yhteyttä $Q = GA\gamma$ on totuttu parantamaan muotoon $Q = kGA\gamma$, missä k on leikkauskorjauskerroin. Toimitaan myös tässä Timoshenko palkkiteorian hengessä ja otetaan leikkausvoimille ja keskimääräisille liukumille lineaarinen riippuvuus. Se esitetään muodossa

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} = GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix}, \quad (60)$$

missä vakioita k_y , k_{yz} , k_{zy} ja k_z kutsutaan leikkauskorjauskertoimiksi.

Seuraavassa johdetaan kaavat leikkauskorjauskertoimien määrittämiseksi. Johto suoritetaan tarkastelemalla taivutettua sauvaa, jossa ei esiinny vääntöä eli $\theta'_x = 0$. Leikkauksen osuus sauvan sisäisestä virtuaalisesta työstä on

$$\delta W_{\text{int}}^s = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_A \begin{Bmatrix} \delta\gamma_{yx} \\ \delta\gamma_{zx} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} dA \right) dx. \quad (61)$$

Käyttäen virtuaalisten liukumien lausekkeita (26b) ja (26c), kun $\delta\theta'_x = 0$, saadaan tästä

$$\delta W_{\text{int}}^s = - \int_{x_1}^{x_2} \left(\begin{Bmatrix} \delta\gamma_y \\ \delta\gamma_z \end{Bmatrix}^T \int_A \begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} dA \right) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} \delta\gamma_y \\ \delta\gamma_z \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix} dx. \quad (62)$$

Sijoittamalla tähän leikkausvoimien lauseke (60) saadaan

$$\delta W_{\text{int}}^s = - \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} \delta\gamma_y \\ \delta\gamma_z \end{Bmatrix}^T GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} dx. \quad (63)$$

Määritetään vastaavasti sisäisen virtuaalisen työn lauseke (61) ottamalla virtuaalisiksi liukumiksi kaavojen (15b) ja (15c) mukaiset tarkemmat lausekkeet, jotka puhtaasti taivutuksen tapauksessa ($\delta\theta'_x = 0$, $\delta\theta''_x = 0$) ovat

$$\begin{Bmatrix} \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\theta''_z \\ \delta\theta''_y \end{Bmatrix}. \quad (64)$$

Saadaan

$$\delta W_{\text{int}}^s = \int_{x_1}^{x_2} \left(\begin{Bmatrix} \delta\theta''_z \\ \delta\theta''_y \end{Bmatrix}^T \int_A \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dA \right) dx. \quad (65)$$

Sijoittamalla tähän leikkausjäännitysten lausekkeet (18b) ja (18c), joissa ($\theta'_x = 0$, $\theta''_x = 0$), eli

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = -G \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix} \quad (66)$$

saadaan

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}}^s &= - \int_{x_1}^{x_2} \left(\begin{Bmatrix} \delta \theta_z'' \\ \delta \theta_y'' \end{Bmatrix} \right)^T \int_A G \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \\ \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} dA \begin{Bmatrix} \theta_z'' \\ \theta_y'' \end{Bmatrix} dx \\ &= - \int_{x_1}^{x_2} \left(\begin{Bmatrix} \delta \theta_z'' \\ \delta \theta_y'' \end{Bmatrix} \right)^T \int_A \begin{bmatrix} Ey\Psi_y & Ez\Psi_y \\ Ey\Psi_z & Ez\Psi_z \end{bmatrix} dA \begin{Bmatrix} \theta_z'' \\ \theta_y'' \end{Bmatrix} dx.\end{aligned}\quad (67)$$

Lopuksi sovellettiin heikon muodon kaavoja (22c) ja (22d), kun $\hat{\Psi}_y = \Psi_y$ ja $\hat{\Psi}_z = \Psi_z$. Tarkempaan liukuma- ja leikkausjännitys jakaumiin (15) ja (18) perustuva sisäisen virtuaalisen työn lauseke saa siten muodon

$$\delta W_{\text{int}}^s = - \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} \delta \theta_z'' \\ \delta \theta_y'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_{y\Psi_y} & EI_{z\Psi_y} \\ EI_{y\Psi_z} & EI_{z\Psi_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z'' \\ \theta_y'' \end{Bmatrix} dx. \quad (68)$$

missä

$$EI_{y\Psi_y} = \int_A Ey\Psi_y dA, \quad EI_{z\Psi_y} = EI_{y\Psi_z} = \int_A Ez\Psi_y dA = \int_A Ey\Psi_z dA, \quad EI_{z\Psi_z} = \int_A Ez\Psi_z dA. \quad (69)$$

Leikkauskorjauskertoimet määritetään vaatimalla virtuaalisen työn lausekkeiden (67) ja (68) olevan yhtäsuuret. Saadaan yhtälö

$$\begin{Bmatrix} \delta \gamma_y \\ \delta \gamma_z \end{Bmatrix}^T GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta \theta_z'' \\ \delta \theta_y'' \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_{y\Psi_y} & EI_{z\Psi_y} \\ EI_{y\Psi_z} & EI_{z\Psi_z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z'' \\ \theta_y'' \end{Bmatrix}. \quad (70)$$

Soveltamalla yhtälöitä (C.2) sekä virtuaalisille että todellisille suureille saadaan tästä

$$\begin{Bmatrix} \delta \theta_z'' \\ \delta \theta_y'' \end{Bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} EI_{y\Psi_y} & EI_{z\Psi_y} \\ EI_{y\Psi_z} & EI_{z\Psi_z} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \theta_z'' \\ \theta_y'' \end{Bmatrix} = 0, \quad (71)$$

josta seuraa leikkauskorjauskertoimille tulos

$$\begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} = \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_{y\Psi_y} & EI_{z\Psi_y} \\ EI_{y\Psi_z} & EI_{z\Psi_z} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}. \quad (72)$$

Todetaan, että $k_{yz} = k_{zy}$. Leikkausvoimien ja keskimääräisten liukumien yhteydet (60) ja leikkauskorjauskertoimien määrittäyskaava (72) antavat mahdollisuuden yleistää Timoshenko palkkiteoria luontevasti kaksiakseliseen taivutukseen.

4.3 Vääntömomentti ja Saint-Venantin vääntömomentti

Soveltamalla vääntömomentin määrittelykaavaa (33f) ja leikkausjännitysten lausekkeita (18b) ja (18c) saadaan

$$\begin{aligned}
M_x = & \theta'_x \int_A G \left[-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)(z - z_T) + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)(y - y_T) \right] dA \\
& + \theta''_x \int_A G \left[-\frac{\partial\Psi_x}{\partial y}(z - z_T) + \frac{\partial\Psi_x}{\partial z}(y - y_T) \right] dA \\
& - \theta''_z \int_A G \left[-\frac{\partial\Psi_y}{\partial y}(z - z_T) + \frac{\partial\Psi_y}{\partial z}(y - y_T) \right] dA \\
& - \theta''_y \int_A G \left[-\frac{\partial\Psi_z}{\partial y}(z - z_T) + \frac{\partial\Psi_z}{\partial z}(y - y_T) \right] dA.
\end{aligned} \tag{73}$$

Tämä saa liitteen E perusteella muodon

$$M_x = GJ\theta'_x - EI_\phi\theta''_x, \tag{74}$$

missä

$$GJ = \int_A G \left[-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right)z + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right)y \right] dA. \tag{75}$$

Niinsanotussa Saint-Venantin vääntöteoriassa vääntömomentin M_x ja vääntymän θ'_x yhteys on muotoa $M_x = GJ\theta'_x$, missä GJ on kaavan (75) mukainen. Tämän vuoksi suuretta

$$T = GJ\theta'_x \tag{76}$$

kutsutaan *Saint-Venantin vääntömomentiksi*. Suuretta GJ kutsutaan *vääntöjäykkyydeksi* ja homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa suuretta J *vääntöjäyhyysmomentiksi*. Kaavojen (74), (76) ja (54c) perusteella saadaan vääntömomentille tulos

$$M_x = T + B'. \tag{77}$$

5 Sauvatehtävän differentiaaliyhtälöistä

5.1 Differentiaaliyhtälöiden johto

Tutkitaan nyt millaisiksi palkin siirtymäformulaation mukaiset differentiaaliyhtälöt muodostuvat. Derivoimalla yhtälöt (44b) ja (44c) puolittain ja sijoittamalla niihin (44d) ja (44e) sekä ottamalla samalla käyttöön osittainen matriisiesitys tasapainoyhtälöt saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
N' + q_x &= 0, \\
\begin{Bmatrix} M_z'' \\ M_y'' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m'_z \\ m'_y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\
\begin{Bmatrix} Q'_y \\ Q'_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\
M'_x + m_x + b' &= 0.
\end{aligned} \tag{78}$$

Sijoittamalla jännitysresultanttien lausekkeet (54) ja (60) tasapainoyhtälöihin (78) sekä käyttämällä yhteyksiä (14) ja (74) saadaan

$$\begin{aligned}
EAu'' + q_x &= 0, \\
\begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_z''' \\ \theta_y''' \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m'_z \\ m'_y \end{Bmatrix}, \\
GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v'' - \theta'_z \\ w'' - \theta'_y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \\
EI_\phi \theta_x^{(4)} - GJ\theta_x'' &= m_x + b'.
\end{aligned} \tag{79}$$

Ensimmäinen yhtälö (79a) on toisen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö, jossa on tuntemattomana aksiaalinen siirtymä $u(x)$. Keskimmäiset yhtälöt (79b) ja (79c) muodostavat neljän yhtälön ryhmän, joissa tuntemattomina ovat vääntökeskiön poikittaiset siirtymät $v(x)$ ja $w(x)$ sekä poikkileikkauksen rotaatiot $\theta_z(x)$ ja $\theta_y(x)$. Viimeinen yhtälö (79d) on neljännen kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö, jossa on tuntemattomana vääntökulma $\theta_x(x)$. Havaitaan, että veto/puristustehtävä, taivutustehtävä ja vääntötehtävä voidaan ratkaista erikseen.

Muokataan taivutustehtävän yhtälöitä (79b) ja (79c) edelleen. Ratkaisemalla yhtälöistä (79c) θ'_z ja θ'_y saadaan

$$\begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \theta'_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v'' \\ w'' \end{Bmatrix} + \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix}. \tag{80}$$

Derivoimalla tämä puolittain kahdesti ja sijoittamalla yhtälöön (79b) saadaan

$$\begin{Bmatrix} v^{(4)} \\ w^{(4)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m'_z \\ m'_y \end{Bmatrix} \right) - \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix}. \tag{81}$$

Merkitsemällä

$$\begin{Bmatrix} f_y \\ f_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} m'_z \\ m'_y \end{Bmatrix} \right) - \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} q_y \\ q_z \end{Bmatrix} \tag{82}$$

nähdään, että yhtälöt (81) ovat kaksi erillistä neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöä

$$v^{(4)} = f_y(x), \quad w^{(4)} = f_z(x), \tag{83}$$

jotka on helppo ratkaista. Kun poikittaiset siirtymät on ratkaistu, voidaan rotaatiot $\theta_z(x)$ ja $\theta_y(x)$ määrittää integroimalla ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöt (80).

5.2 Perustelua paikallisen tarkastelun otaksumiin

Kohdassa 1.3 esitettiin, että suoritettaessa tiettyyn poikkileikkaukseen liittyviä paikallisia tarkasteluja, voidaan jakautuneen kuormituksen vaikutus tasapainoyhtälöissä (44) jättää huomiotta. Tämä merkitsee, että tasapainoyhtälöissä ja vastaavasti palkin differentiaaliyhtälöissä voidaan merkitä $q_x = 0$, $q_y = 0$, $q_z = 0$, $m_x = 0$, $m_y = 0$, $m_z = 0$, $b = 0$. Yhtälöt (79a), (83), (80) ja (79d) saavat siten muodon

$$u'' = 0, \quad v^{(4)} = 0, \quad w^{(4)} = 0, \quad \theta'_z = v'', \quad \theta'_y = w'', \quad EI_\phi \theta_x^{(4)} - GJ\theta_x'' = 0. \tag{84}$$

Yhtälön (84a) ratkaisu $u(x)$ on ensimmäisen asteen polynomi ja yhtälöiden (84b) ja (84c) ratkaisut $v(x)$ ja $w(x)$ ovat kolmannen asteen polynomeja. Yhtälöistä (84d) ja (84e) seuraa $\theta_z = v' + C_1$ ja $\theta_y = w' + C_2$, joten $\theta_z(x)$ ja $\theta_y(x)$ ovat toisen asteen polynomeja. Näin pystyttiin perustelemaan kohdassa 1.3 esitetyt siirtymien $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ ja rotaatioiden

$\theta_z(x)$ ja $\theta_y(x)$ polynomiapproksimaatioiden asteluvut. Yhtälön (84f) ratkaisu $\theta_x(x)$ sensijaan ei ole polynomimuotoinen. Tämän vuoksi kohdassa 1.3 tehtyä vääntökulman $\theta_x(x)$ paikallisen approksimaation valitsemista kuubiseksi ei voida perustella tällä tavoin.

6 Poikkileikkauksen jännitys jakauman määrittäminen

Kun palkin poikkileikkauksen käyritysmisfunktiot $\Phi(y, z)$, $\Psi_x(y, z)$, $\Psi_y(y, z)$ ja $\Psi_z(y, z)$ on ratkaistu reuna-arvoprobleemista (21) ja palkin siirtymäsuureet $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, $\theta_x(x)$, $\theta_y(x)$ ja $\theta_z(x)$ on ratkaistu esimerkiksi differentiaaliyhtälöistä (79a) (83), (80) ja (79d), voidaan tietyn poikkileikkauksen $x = x_0$ jännitys jakaumat määrittää käyttäen yhtälöitä (18), jotka ovat sopivassa matriisimuodossa

$$\sigma_x = E(u' - \begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \theta'_y \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix}) + \theta''_x \phi, \quad (85)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = G(\theta'_x \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \end{Bmatrix}) + \theta'''_x \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix}.$$

Niissä $u' = u'(x_0)$, $\theta'_x = \theta'_x(x_0)$, $\theta''_x = \theta''_x(x_0)$, $\theta'''_x = \theta'''_x(x_0)$, $\theta'_y = \theta'_y(x_0)$, $\theta''_y = \theta''_y(x_0)$, $\theta'_z = \theta'_z(x_0)$ ja $\theta''_z = \theta''_z(x_0)$.

Yhtälöissä (85) esiintyvät siirtymäsuureiden derivaatat u' , θ'_x , θ''_x , θ'_y ja θ'_z voidaan ratkaista jännitysresultanttien avulla yhtälöistä (54) ja (76). Derivoimalla vielä θ''_x :n, θ'_y :n ja θ'_z :n lausekkeet puolittain sekä soveltamalla tasapainoyhtälöitä (56) saadaan

$$u' = \frac{N}{EA}, \quad \theta'_x = \frac{T}{GJ}, \quad \theta''_x = -\frac{B}{EI_\phi}, \quad \theta'''_x = -\frac{B'}{EI_\phi}, \quad (86)$$

$$\begin{Bmatrix} \theta'_z \\ \theta'_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}.$$

Sijoittamalla tulokset (86) lausekkeisiin (85) saadaan jännitykset lausutuiksi jännitysresultanttien avulla seuraavasti

$$\sigma_x = E\left(\frac{N}{EA} + \begin{Bmatrix} M_z \\ M_y \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} y \\ z \end{Bmatrix} - \frac{B}{EI_\phi} \phi\right),$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = G\left(\frac{T}{GJ} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \end{Bmatrix} - \frac{B'}{EI_\phi} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \\ \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} & \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_z \end{Bmatrix}\right). \quad (87)$$

Siinä tapauksessa, että y, z -koordinaatisto yhtyy poikkileikkauksen pääjäykkyyskoordinaatistoon ($EI_{yz} = 0$), yhtälöt (87) saavat yksinkertaisemmän muodon

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= E\left(\frac{N}{EA} + \frac{M_z}{EI_z} y + \frac{M_y}{EI_y} z - \frac{B}{EI_\phi} \phi\right), \\
\tau_{yx} &= G\left[\frac{T}{GJ} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y} - z\right) - \frac{B'}{EI_\phi} \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} + \frac{Q_y}{EI_z} \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} + \frac{Q_z}{EI_y} \frac{\partial\Psi_z}{\partial y}\right], \\
\tau_{zx} &= G\left[\frac{T}{GJ} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + y\right) - \frac{B'}{EI_\phi} \frac{\partial\Psi_x}{\partial z} + \frac{Q_y}{EI_z} \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} + \frac{Q_z}{EI_y} \frac{\partial\Psi_z}{\partial z}\right].
\end{aligned} \tag{88}$$

Tarkastellaan lopuksi kaavojen (88) ja liitteessä F esitettyjen avointen ohutseinämäisten poikkileikkausten jännitysten kaavojen (F.13) ja (F.14) yhtäläisyyksiä. Homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa normaalijännityksen kaava (88a) saa muodon

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y + \frac{M_y}{I_y} z - \frac{B}{I_\phi} \phi. \tag{89}$$

Kaava (F.13) poikkeaa kaavasta (89) siinä, että käyritysmisjäyhyysmomentin I_ϕ paikalla on sektoriaalinen jäyhyysmomentti I_ω ja käyritysmisfunktion $\phi(y, z)$ paikalla normeerattu sektoriaalinen koordinaatti $\omega_T(s)$ vääntökeskiön suhteen. Leikkausjännityksien kohdalla Saint-Venantin väännön osuus jätetään yksinkertaisuuden vuoksi tarkastelun ulkopuolelle. Homogeenisen poikkileikkauksen tapauksessa leikkausjännitysten kaavat (88b) ja (88c) ilman Saint-Venantin vääntömomentin T sisältävää termiä ovat

$$\begin{aligned}
\tau_{yx} &= \frac{Q_y}{I_z} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_y}{\partial y} + \frac{Q_z}{I_y} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{B'}{I_\phi} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_x}{\partial y}, \\
\tau_{zx} &= \frac{Q_y}{I_z} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} + \frac{Q_z}{I_y} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_z}{\partial z} - \frac{B'}{I_\phi} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_x}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{90}$$

Tarkastellaan leikkausjännityskomponenttia τ_{sx} ohutseinämäisen poikkileikkauksen keski-
viivalla $y = y(s)$, $z = z(s)$. Sauvateorian jännitysotaksumien (1) vallitessa sille on voimassa

$$\tau_{sx} = \frac{dy}{ds} \tau_{yx} + \frac{dz}{ds} \tau_{zx}. \tag{91}$$

Käyttäen kaavoja (90) ja (91) saadaan

$$\tau_{sx} = \frac{Q_y}{I_z} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_y}{\partial s} + \frac{Q_z}{I_y} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_z}{\partial s} - \frac{B'}{I_\phi} \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_x}{\partial s}. \tag{92}$$

Kaava (F.14) poikkeaa nyt kaavasta (92) siinä, että käyritysmisjäyhyysmomentin I_ϕ paikalla on sektoriaalinen jäyhyysmomentti I_ω ja

$$\frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_y}{\partial s} \triangleq \frac{\tilde{S}_z}{t}, \quad \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_z}{\partial s} \triangleq \frac{\tilde{S}_y}{t}, \quad \frac{G}{E} \frac{\partial\Psi_x}{\partial s} \triangleq \frac{\tilde{S}_\omega}{t}, \tag{93}$$

missä merkki \triangleq tarkoittaa vastaavuutta. Kaavoissa (93) $\tilde{S}_y(s)$, $\tilde{S}_z(s)$ ja $\tilde{S}_\omega(s)$ ovat osapoikkipinnan staattiset momentit ja $t(s)$ on poikkileikkauksen paksuus.

Johtopäätökset

Artikkelissa on esitetty teoria, jonka avulla voidaan määrittää taivutetun ja väännetyt suoran sauvan siirtymä- ja jännitystila systemaattisesti ja perinteisiä teorioita tarkemmin. Sauvan poikkileikkaus voi olla muodoltaan mielivaltainen ja koostua myös useammasta materiaalista. Oleellisena osana teoriaa on poikkileikkaukseen liittyvien reuna-arvot tehtävien mukanaolo.

Nykyaikaisten tehokkaiden elementtimenetelmäohjelmistojen johdosta nämä lisätehtävät eivät aiheuta ongelmia. Samaan tapaan kuin perinteisissä sauvateorioissa veto/puristus-, taivutus- ja vääntötehtävät voidaan käsitellä erikseen. Taivutuksen yhtälöissä leikkausmuodonmuutoksen vaikutus otetaan huomioon Timoshenkon palkkiteoriaa muistuttavalla käsittelytavalla, johon liittyville leikkauskorjauskertoimille on johdettu kaavat. Väännön yhtälöt muistuttavat monessa suhteessa avointen ohutseinämäisten sauvojen väännön yhtälöitä. Keskeisin eroavaisuus on siinä, että ohutseinämäisen poikkileikkauksen sektorialista koordinaattia $\Omega_0(s)$ origon O suhteen (nollapiste P_0) ja normeerattua sektorialista koordinaattia $\omega_T(s)$ vääntökeskiön T suhteen vastaavat tässä teoriassa käyritysmisfunktio $\Psi(y, z)$ (nollapiste P_0) ja käyritysmisfunktio $\psi(y, z)$. Koska sektorialinen koordinaatti on vain ohutseinämäiseen poikkileikkaukseen liittyvä suure, mutta käyritysmisfunktio voidaan määrittää mielivaltaisen muotoiselle poikkileikkaukselle, voidaan esitettyä teoriaa pitää avointen ohutseinämäisten sauvojen taivutus- ja vääntöteorian yleistyksenä. Se soveltuu kaikentyyppisille, myös eri materiaaleista koostuville, poikkileikkauksille ja huomioi leikkausmuodonmuutoksen vaikutuksen taipumaan. Poikkileikkaus voi olla täysi tai ontto, paksu- tai ohutseinämäinen ja avoin tai suljettu.

Kiitokset

Kiitokset em. prof. Eero-Matti Saloselle, joka on vuosien varrella useaan otteeseen tuonut esille ajatuksen mahdollisuudesta kehittää teoria, jolla sauvan vääntötehtävä voitaisiin käsitellä poikkileikkauksen tyypistä riippumatta yhtenäisellä tavalla. Hänen lukuisat työn varrella antamansa kommentit ja parannusehdotukset ovat mahdollistaneet tämän artikkelin syntymisen. Kiitokset myös artikkelin arvioijille perusteellisesta työstä.

Liite A: Kaavojen (6) johto

Otaksutaan, että poikkileikkaus kohdassa x siirtyy jäykän kappaleen pienen siirtymän liikkeen mukaisesti. Valitaan siirtopisteeksi poikkileikkauksen piste T . Poikkileikkauksen yleisen pisteen siirtymävektorille

$$\mathbf{u}^R(x, y, z) = u_x^R(x, y, z)\mathbf{i} + u_y^R(x, y, z)\mathbf{j} + u_z^R(x, y, z)\mathbf{k} \quad (\text{A.1})$$

saadaan

$$\mathbf{u}^R = \mathbf{u}_T + \boldsymbol{\theta} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_T), \quad (\text{A.2})$$

missä

$$\mathbf{u}_T(x) = u_T(x)\mathbf{i} + v_T(x)\mathbf{j} + w_T(x)\mathbf{k} \quad (\text{A.3})$$

on siirtopisteen siirtymävektori,

$$\boldsymbol{\theta}(x) = \theta_x(x)\mathbf{i} - \theta_y(x)\mathbf{j} + \theta_z(x)\mathbf{k}$$

poikkileikkauksen rotaatiovektori,

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{A.4})$$

poikkileikkauksen yleisen pisteen paikkavektori ja

$$\mathbf{r}_T = x_T\mathbf{i} + y_T\mathbf{j} + z_T\mathbf{k} \quad (\text{A.5})$$

siirtopisteen paikkavektori. Rotaatiovektorin komponentin θ_y positiivinen suunta on valittu palkkiteoriassa usein käytettyyn tapaan y - akselin negatiiviseen suuntaan. (Valinnan seurauksena tämän artikkelin esitys muodostuu merkinnällisesti mahdollisimman selkeäksi siten, että johdettavien kaavojen x, y - ja x, z - tasoissa tapahtuvaan taivutukseen liittyvät osuudet tulevat olemaan samanmuotoiset.) Siirtymävektorille \mathbf{u}^R saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^R &= u_T\mathbf{i} + v_T\mathbf{j} + w_T\mathbf{k} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \theta_x & -\theta_y & \theta_z \\ 0 & y - y_T & z - z_T \end{vmatrix} \\ &= u_T\mathbf{i} + v_T\mathbf{j} + w_T\mathbf{k} + \begin{vmatrix} -\theta_y & \theta_z \\ y - y_T & z - z_T \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} \theta_z & \theta_x \\ z - z_T & 0 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \theta_x & -\theta_y \\ 0 & y - y_T \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= [u_T - \theta_y(z - z_T) - \theta_z(y - y_T)]\mathbf{i} + [v_T - \theta_x(z - z_T)]\mathbf{j} + [w_T + \theta_x(y - y_T)]\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Vertaamalla lausekkeita (A.1) ja (A.6) saadaan siirtymäkomponenteille

$$\begin{aligned} u_x^R(x, y, z) &= u_T(x) - \theta_z(x)(y - y_T) - \theta_y(x)(z - z_T), \\ u_y^R(x, y, z) &= v_T(x) - \theta_x(x)(z - z_T), \\ u_z^R(x, y, z) &= w_T(x) + \theta_x(x)(y - y_T). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Nämä ovat kaavat (6).

Liite B: Käyritysmisfunktioiden yhteyksien (16) johto

Vertaamalla liukumien lausekkeita kaavoissa (13) ja (15) saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} \theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} + z_T - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \theta''_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) + \gamma_y - \theta''_z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \right) - \theta''_y \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} \right) &= 0, \\ \theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - y_T - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) + \theta''_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) + \gamma_z - \theta''_z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) - \theta''_y \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Soveltamalla yhteyksiä (17) saadaan edelleen

$$\theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z_T \right) + \theta''_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) - \theta''_z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + c_{11} \right) - \theta''_y \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} + c_{12} \right) = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\theta'_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} - y_T \right) + \theta''_x \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) - \theta''_z \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} + c_{21} \right) - \theta''_y \left(\frac{\partial \psi_z}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} + c_{22} \right) = 0.$$

Koska yhtälöiden (B.2) tulee olla voimassa kaikilla arvoilla θ'_x , θ''_x , θ''_y ja θ''_z , saadaan käyritysmisfunktioden välille differentiaaliyhtälöparit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} - z_T, & \frac{\partial \phi}{\partial z} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + y_T, \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial y}, & \frac{\partial \psi_x}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} - c_{11}, & \frac{\partial \psi_y}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} - c_{21}, \\ \frac{\partial \psi_z}{\partial y} &= \frac{\partial \Psi_z}{\partial y} - c_{12}, & \frac{\partial \psi_z}{\partial z} &= \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} - c_{22}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Näiden ratkaisuna saadaan alkuperäisten ja muunnettujen käyritysmisfunktioden välille yhtälöt

$$\begin{aligned} \phi(y, z) &= \Phi(y, z) + \Delta_\phi - z_T y + y_T z, \\ \psi_x(y, z) &= \Psi_x(y, z) + \Delta_{\psi_x}, \\ \psi_y(y, z) &= \Psi_y(y, z) + \Delta_{\psi_y} - c_{11} y - c_{21} z, \\ \psi_z(y, z) &= \Psi_z(y, z) + \Delta_{\psi_z} - c_{12} y - c_{22} z. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Nämä ovat kaavat (16).

Liite C: Kaavan (17) johto

Vertaamalla leikkausvoimien lausekkeitä (55) ja (60) saadaan yhtälö

$$-\begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix} = GA \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

josta seuraa

$$\begin{Bmatrix} \gamma_y \\ \gamma_z \end{Bmatrix} = -\frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta''_z \\ \theta''_y \end{Bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Havaitaan, että kysymyksessä on kaava (17), jossa

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{GA} \begin{bmatrix} k_y & k_{yz} \\ k_{zy} & k_z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} EI_z & EI_{yz} \\ EI_{yz} & EI_y \end{bmatrix}. \quad (\text{C.3})$$

Liite D: Reuna-arvoprobleemien (21) heikot muodot

Kertomalla kenttäyhtälö (21a) puolittain testifunktiolla $\hat{\Phi}(y, z)$ ja integroimalla määrittelyalueen A yli saadaan

$$\int_A \hat{\Phi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] \right\} dA = 0. \quad (\text{D.1})$$

Soveltamalla osittaisintegrointia saadaan edelleen

$$\int_s \hat{\Phi} \left[n_y G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + n_z G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] ds - \int_A G \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dA = 0 \quad (\text{D.2})$$

ja ottamalla huomioon reunaehto (21a) lopuksi

$$\int_A G \left[\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dA = 0. \quad (\text{D.3})$$

Tämä on heikko muoto (22a). Kertomalla kenttäyhtälö (21b) puolittain testifunktiolla $\hat{\Psi}_x(y, z)$ ja integroimalla määrittelyalueen A yli saadaan

$$\int_A \hat{\Psi}_x \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) + E\phi \right] dA = 0, \quad (\text{D.4})$$

Soveltamalla osittaisintegrointia saadaan edelleen

$$\int_s \hat{\Psi}_x \left(n_y G \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + n_z G \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) ds - \int_A G \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA + \int_A E \hat{\Psi}_x \phi dA = 0, \quad (\text{D.5})$$

ja ottamalla huomioon reunaehto (21b) lopuksi

$$\int_A G \left(\frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\Psi}_x}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA = \int_A E \hat{\Psi}_x \phi dA. \quad (\text{D.6})$$

Tämä on heikko muoto (22b). Vastaavaan tapaan menetellen saadaan myös reuna-arvo-probleemien (21c) ja (21d) heikot muodot (22c) ja (22d).

Liite E: Kaavan (74) johto

Kaavassa (73) vääntökulman derivaatan θ'_x kertoimena olevalle lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned} & \int_A G \left[- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) (z - z_T) + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) (y - y_T) \right] dA \\ &= \int_A G \left[- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) y \right] dA + z_T \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) dA + y_T \int_A G \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) dA \quad (\text{E.1}) \\ &= \int_A G \left[- \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) z + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) y \right] dA = GJ. \end{aligned}$$

Lopussa sovellettiin heikkoa muotoa (22a), jossa erityisesti $\hat{\Phi} = y$ ja $\hat{\Phi} = z$. Kaavassa (73) vääntökulman kolmannen derivaatan θ'''_x kertoimena olevalle lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned} & \int_A G \left[- \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} (z - z_T) + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} (y - y_T) \right] dA \\ &= \int_A G \left[\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} - z + z_T \right) + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} + y - y_T \right) \right] dA - \int_A G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA \quad (\text{E.2}) \\ &= \int_A G \left[\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dA - \int_A G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA \\ &= - \int_A E \phi^2 dA = -EI_\phi. \end{aligned}$$

Aluksi lisättiin ja vähennettiin lauseke

$$\int_A G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_x}{\partial z} \right) dA,$$

sitten käytettiin kaavaa (16a) ja lopuksi sovellettiin reuna-arvoprobleemien heikkoja muotoja (22a) ja (22b), joissa erityisesti $\hat{\Phi} = \Psi_x$ ja $\hat{\Psi}_x = \phi$. Kaavassa (73) kiertymän toisen derivaatan θ_z'' kertoimena olevalle lausekkeelle saadaan

$$\begin{aligned} & \int_A G \left[-\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} (z - z_T) + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} (y - y_T) \right] dA \\ &= \int_A G \left[\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - z \right) + \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} + y \right) \right] dA - \int_A G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) dA \\ &= -\int_A E \phi y dA = -EI_{z\phi} = 0. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

Aluksi lisättiin ja vähennettiin lauseke

$$\int_A G \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \Psi_y}{\partial z} \right) dA,$$

sitten käytettiin kaavaa (16a) ja lopuksi sovellettiin reuna-arvoprobleemien heikkoja muotoja (22a) ja (22b), joissa erityisesti $\hat{\Phi} = \Psi_y$ ja $\hat{\Psi}_y = \phi$. Vastaavalla tavalla saadaan johdetuksi kaavassa (73) kiertymän toisen derivaatan θ_y'' kertoimena olevalle lausekkeelle tulos

$$\int_A G \left[-\frac{\partial \Psi_z}{\partial y} (z - z_T) + \frac{\partial \Psi_z}{\partial z} (y - y_T) \right] dA = -EI_{y\phi} = 0. \quad (\text{E.4})$$

Sijoittamalla tulokset (E.1), (E.2), (E.3) ja (E.4) kaavaan (73) saadaan kaava (74).

Liite F: Avointen ohutseinämäisten sauvojen vääntöön liittyviä kaavoja

Tarkastellaan avointa ohutseinämäistä poikkileikkausta, jonka keskiviivaa seuraa kaarenpituuskoordinaatti s . Keskiviivan yhtälöt ovat

$$y = y(s), \quad z = z(s) \quad (\text{F.1})$$

ja poikkileikkauksen paksuus on $t(s)$. Rajoitutaan yksinkertaisuuden vuoksi haarautumattomaan poikkileikkaukseen, jonka toinen pää on pisteessä $s = 0$ ja toinen pää pisteessä $s = l$. Poikkileikkauksen *sektoriaalinen koordinaatti* $\Omega_A(s)$ pisteen A: (y_A, z_A) suhteen voidaan määrittää kaavalla

$$\Omega_A(s) = \int_{s_0}^s \left\{ [y(s') - y_A] \frac{dz}{ds}(s') - [z(s') - z_A] \frac{dy}{ds}(s') \right\} ds'. \quad (\text{F.2})$$

Pistettä A kutsutaan sektoriaalisen koordinaatin *navaksi* ja pistettä P_0 : s_0 , jossa Ω_A häviää, sen *nollapisteksi*. Kun sektoriaalinen koordinaatti pisteen A suhteen tunnetaan, voidaan sektoriaalinen koordinaatti pisteen B suhteen määrittää napapisteen vaihtokaavalla

$$\Omega_B = \Omega_A + (z_B - z_A)(y - y_0) - (y_B - y_A)(z - z_0), \quad (\text{F.3})$$

missä y_0 ja z_0 ovat nollapisteen P_0 koordinaatit.

Poikkileikkaukselle, jonka sektoriaalinen koordinaatti on Ω , määritellään *sektoriaalinen staattinen momentti*, *sektoriaaliset tulomomentit* ja *sektoriaalinen neliomomentti* kaavoilla

$$\begin{aligned}
S_{\Omega} &= \int_A \Omega dA = \int_0^l \Omega(s)t(s)ds, \\
I_{y\Omega} &= \int_A z\Omega dA = \int_0^l z(s)\Omega(s)t(s)ds, \quad I_{z\Omega} = \int_A y\Omega dA = \int_0^l y(s)\Omega(s)t(s)ds, \\
I_{\Omega} &= \int_A \Omega^2 dA = \int_0^l \Omega^2(s)t(s)ds.
\end{aligned} \tag{F.4}$$

Lisäksi määritellään *osapoikkileikkauksen sektoriaalinen staattinen momentti* kaavalla

$$\tilde{S}_{\Omega}(s) = \int_s^l \Omega(s')t(s')ds'. \tag{F.5}$$

Sektoriaalista koordinaattia $\omega(s)$, jolle on voimassa ehto $S_{\omega} = 0$, kutsutaan *normeeratuksi*. Sille voidaan johtaa ([4], kaava (5.27)) kaava

$$\omega(s) = \Omega(s) - \frac{S_{\Omega}}{A}. \tag{F.6}$$

Oletetaan, että $\Omega_O(s)$ on sektoriaalinen koordinaatti origon O suhteen, jonka nollapiste on P_0 , tunnetaan. Kaavan (F.3) perusteella saadaan sektoriaaliselle koordinaatille $\Omega_T(s)$ vääntökeskiön T suhteen lauseke

$$\Omega_T = \Omega_O + z_T y - y_T z - z_T y_0 + y_T z_0. \tag{F.7}$$

Normeeratulle sektoriaaliselle koordinaatille $\omega_T(s)$ vääntökeskiön suhteen saadaan soveltamalla kaavoja (F.6) ja (F.7)

$$\omega_T = \Omega_O + z_T y - y_T z - \frac{S_{\Omega_O} + z_T S_z - y_T S_y}{A}. \tag{F.8}$$

Kun origo on asetettu tavanomaisesti pintakeskiöön, jolloin $S_z = 0$ ja $S_y = 0$, seuraa tästä

$$\omega_T = \Omega_O + \Delta_{\Omega} + z_T y - y_T z, \tag{F.9}$$

missä

$$\Delta_{\Omega} = -\frac{S_{\Omega_O}}{A}. \tag{F.10}$$

Avoimen ohutseinämäisen poikkileikkauksen *vääntökeskiö* T määritellään pisteenä, jonka suhteen määritetyn sektoriaalisen koordinaatin Ω_T avulla määritetyillä tulomomenteille on voimassa ehdot $I_{y\Omega} = 0$ ja $I_{z\Omega} = 0$. Näiden ehtojen perusteella vääntökeskiön koordinaateille voidaan johtaa ([4] kaava (5.39)) kaava

$$\begin{Bmatrix} y_T \\ z_T \end{Bmatrix} = \frac{1}{I_y I_z - I_{yz}^2} \begin{bmatrix} I_z & I_{yz} \\ I_{yz} & I_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} I_{y\Omega_O} \\ -I_{z\Omega_O} \end{Bmatrix}. \tag{F.11}$$

Kun sektoriaalinen koordinaatti $\Omega_O(s)$ origon O suhteen, jonka nollapiste on P_0 , tunnetaan, voidaan vääntökeskiön koordinaatit y_T ja z_T määrittää kaavalla (F.11) ja normeerattu sektoriaalinen koordinaatti $\omega_T(s)$ vääntökeskiön T suhteen kaavalla (F.9).

Erityinen avointen ohutseinämäisen sauvojen vääntöteorian jännitysresultantti on *bimomentti*. Se määritellään kaavalla

$$B = \int_A \sigma_x \omega_T dA = \int_0^l \sigma_x(s) \omega_T(s) t(s) ds. \quad (\text{F.12})$$

Avointen ohutseinämäisen sauvojen yhdistetyssä taivutus- ja vääntöteoriassa, kun y, z -koordinaatisto yhtyy poikkileikkauksen pääjäyhyyskoordinaatistoon ($I_{yz} = 0$), normaalijännitykselle ja keskimääräiselle leikkausjännitykselle on voimassa kaavat

$$\sigma_x(s) = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{I_z} y(s) + \frac{M_y}{I_y} z(s) - \frac{B}{I_\omega} \omega(s), \quad (\text{F.13})$$

$$\bar{\tau}_{sx}(s) = \frac{Q_y}{I_z} \frac{\tilde{S}_z(s)}{t(s)} + \frac{Q_z}{I_y} \frac{\tilde{S}_y(s)}{t(s)} - \frac{B'}{I_\omega} \frac{\tilde{S}_\omega(s)}{t(s)}. \quad (\text{F.14})$$

Kaavassa (F.14) $\tilde{S}_z(s)$ ja $\tilde{S}_y(s)$ ovat osapoikkileikkauksen staattiset momentit, jotka määritetään vastaavaan tapaan kuin osapoikkileikkauksen sektoriaalinen staattinen momentti $\tilde{S}_\omega(s)$ kaavassa (F.5). Kaava (F.14) ei sisällä Saint-Venantin väännön osuutta leikkausjännityksestä τ_{sx} . Se on totuttu määrittämään erikseen likikaavalla

$$\tau_{sx} = 2 \frac{T}{J} \eta, \quad (\text{F.15})$$

missä η on poikkileikkauksen keskiviivaa s vastaan kohtisuora koordinaatti ja

$$J = \frac{1}{3} \int_0^l t^3(s) ds \quad (\text{F.16})$$

on avoimen ohutseinämäisen poikkileikkauksen vääntöjäyhyysmomentti.

Viitteet

- [1] J. Aalto and R. Syrjä, "A unified solution attempt for the torsion problem", Proceedings of the 24th Nordic Seminar on Computational Mechanics, J. Freund and R. Kouhia (Eds.), Aalto University, 2011.
- [2] J. Aalto ja E.-M. Salonen, "Systemaattinen menettelytapa taivutetun ja väännetyin palkin jännitysten määrittämiseksi", Proceedings of the 11th Finnish Mechanics Days, H. Koivurova and M. Malaska (Eds.), University of Oulu 2012.
- [3] S.P. Timoshenko and J. N. Goodier, "Theory of Elasticity", 3rd ed., McGraw-Hill, 1970.
- [4] C.F. Kollbrunner and K. Basler, "Torsion in Structures", Springer-Verlag, 1969.
- [5] S.P. Timoshenko, "On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section.", Philosophical Magazine, p. 744, 1921.

Jukka Aalto,
Aalto-yliopisto, Insinööritieteiden korkeakoulu, Rakennustekniikan laitos
PL 12100, 00076 Aalto
jukka.aalto@aalto.fi