

Rakenteiden Mekaniikka (Journal of Structural Mechanics)

vol. 57, nro 2, 2024, s. 76–79

<http://rakenteidenmekaniikka.journal.fi>

<https://doi.org/10.23998/rm.141526>

© 2024 kirjoittaja

Vapaasti saatavilla CC BY 4.0 -lisenssin mukaisesti

Tekninen selvitys: Kommentteja aiempiin teknisiin selvityksiin

Avainsanat: tarkat elementit, liittopalkki, kerrospalkki

Julkaistu verkossa: 12.8.2024.

Johdanto

Tämä artikkeli sisältää kommentteja, erityisesti historiallista perspektiiviä, Rakenteiden Mekaniikka -lehdessä julkaistuihin teknisiin selvityksiin ”Tarkkoja elementtejä helposti” [1] ja ”Tarkka liittopalkkielementti helposti” [2]. Yksi tekninen, tai voisi ehkä sanoa tieteellinen, kommentti esitetään koskien vapausasteesiirtymien ja vapausastevoimien valintaa. Se esitetään siksi, että jos esitettyä menetelmää aikoo käyttää uuden probleeman ratkaisuun, niin kommentti on syytä ottaa huomioon.

Historiaa lyhyesti

Lehdessä julkaistuissa teknisissä selvityksissä [1] ja [2] ei ole kuvattu menetelmien historiaa, mutta tässä artikkelissa esitetään lyhyet katsaukset historiaan, jotta lukijat saisivat käsityksen esitettyjen menetelmien taustoista ja käytöstä aiemmin. Teknisissä selvityksissä [1] ja [2] on esitetty, kuinka tarkkoja jäykkyyismatriiseja saadaan vallitsevien differentiaaliyhtälöiden ratkaisusta. Täsmälleen samaa menetelmää kuin teknisessä selvityksessä [1] on käytetty mm. lähteissä [8], [11] ja [12] sekä hieman elegantimmin lähteessä [15].

Teknisessä selvityksessä [2] on johdettu liittopalkin differentiaaliyhtälöt, kun liittopalkki on muodostettu kahdesta erilaisesta kimmoisesta palkista, joita yhdistää kimmainen väliaine. Kyseessä on kerrospalkin erikoistapaus ja kerrospalkin teoria on ollut tunnettu jo noin 80 vuotta (ks. [4], [5], [7], [10], [13], [14] ja [16]). Lähteissä [7], [14] ja [16] tarkasteltiin naulattuja puupalkkeja. Lähteessä [5] käsiteltiin aukollisia leikkausseiniä ja lähteessä [4] Vierendeel-kannattimia. Kerrospalkkiteorialla on analysoitu betoni–teräsliittopalkkeja [13] kuten myös sandwich-rakenteita [10]. Kun uusia sovellutuksia tehdään, niin tapana on usein johtaa kerrospalkin teoria uudestaan [17]. Tämän lehden artikkeleissa on käytetty kerrospalkkien teoriaa mm. lähteessä [9]. Uusimpia julkaisuja koski-

en liittopalkkeja on esimerkiksi [3]. Runsaimmin kerrospalkkiteorian sovellutuksia löytynee sandwich-rakenteiden analyyseistä. Mennään seuraavaksi tekniseen kommenttiin.

Tekninen kommentti

Teknisessä selvityksessä [2] on kirjoitettu koskien vapausastesiirtymien ja vapausastevoimien valintaa: ”vapausastesiirtymiksi otetaan...” ja vapausastevoimiksi otetaan...”. Lukijalle saattaa jäädä käsitys, että ne voidaan valita vapaasti. Kimmoisen kappaleen mekaniikka hallitaan kappaleen sisällä differentiaaliyhtälöillä ja kappaleen reunoilla reunaehdoilla. Kimmoteoreettisen tehtävän yksikäsitteisen ratkaisun olemassaolon edellytys on, että reunaehdot ovat komplementaariset. Komplementaariset reunaehdot voidaan johtaa tarkastelemalla rakenteen potentiaalienergian stationäärisyyttä ja kerrospalkille tämä on tehty lähteessä [8]. Käyttäen lähteen [8] merkintöjä taivutetun jänneväliltään L mittaisen kerrospalkin homogeeniset komplementaariset reunaehdot voidaan esittää muodossa

$$\int_0^L (Qv - M\varphi - M_0\gamma) = 0, \quad (1)$$

missä Q on palkin leikkausvoima, M on palkin taivutusmomentti, M_0 on kerrospalkin paarteiden taivutusmomenttien summa, v on palkin taipuma, φ on palkin kiertymä ja γ on liukukulma mitattuna paarteiden keskiöissä. Näiden suureiden välillä on voimassa yhtälö

$$\varphi = v' - \gamma, \quad (2)$$

ja oletetaan, että paarteiden keskiöt säilyvät taivutuksessa samalla linjalla. Tämä on yksi teorian perusoletus, ns. yleistetty Bernoullin hypoteesi, joka on tuotu kerrospalkin teoriaan ensimmäisen kerran lähteessä [16].

Komplementaariset reunaehdot voidaan esittää monessa muodossa. Lähteen [6] kerrospalkin tarkassa elementtimenetelmän formuloinnissa on käytetty muotoa

$$\int_0^L (Qv - Mv' + M_s\gamma) = 0, \quad (3)$$

joka saadaan kaavasta (1) muokkaamalla:

$$\begin{aligned} \int_0^L (Qv - M\varphi - M_0\gamma) &= \int_0^L (Qv - M(v' - \gamma) - M_0\gamma) => \\ \int_0^L (Qv - Mv' + (M - M_0)\gamma) &= \int_0^L (Qv - Mv' + M_s\gamma) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Kaavasta (1) saadaan muokkaamalla myös

$$\begin{aligned} \int_0^L (Qv - M\varphi - M_0\gamma) &= \int_0^L (Qv - (M_0 + M_s)(v' - \gamma) - M_0\gamma) = 0 => \\ \int_0^L (Qv - M_0v' + M_0\gamma - M_s v' + M_s\gamma - M_0\gamma) &= \int_0^L (Qv - M_0v' - M_s\varphi) = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

ja tätä viimeistä muotoa on käytetty teknisessä selvityksessä [2] eli reunaehdot ovat komplementaariset. Lähteessä [8] on esitetty myös muita käytettyjä muotoja komplementaarista reunaehdoista.

Lähteet

- [1] J. Aalto. Tekninen selvitys: Tarkkoja elementtejä helposti. *Rakenteiden Mekaniikka*, 56 (4): 199–204, 2023. <https://doi.org/10.23998/rm.141526>
- [2] J. Aalto. Tekninen selvitys: Tarkka liittopalkkielementti helposti. *Rakenteiden Mekaniikka*, 57 (1): 37–42, 2004. <https://doi.org/10.23998/rm.142740>
- [3] A. Aspila, M. Heinisuo, K. Mela, M. Malaska, S. Pajunen. Elastic design of steel-timber composite beams. *Wood Material Science & Engineering* 17 (4): 243–252, 2022. <https://doi.org/10.1080/17480272.2022.2093128>
- [4] H. Beck. Ein neues Berechnungsverfahren für gegliederte Scheiben, dargestellt am Biespiel des Vierendeelträgers. *Der Bauingenieur* 31 (12): 436–443, 1952.
- [5] L. Chitty. On the cantilever composed of a number of parallel beams interconnected by cross bars. *Phil. Mag. Series 7*, 38 (285): 685–699, 1947.
- [6] J. Davies. *Lightweight Sandwich Construction*. Wiley, 2001. <https://doi.org/10.1002/9780470690253>
- [7] H. Granholm. Om sammansatta balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner (On composite beams and columns with particular regard to nailed timber structures). *Transactions of Chalmers University of Technology*, No. 88. Göteborg, 1949.
- [8] M. Heinisuo. Exact Finite Element Method for Layered Beams. *Publications 56, Tampere University of Technology*, Tampere, 1989.
- [9] M. Heinisuo, S. Pajunen. CLT beam analysis using classical elastic theory of layered beams. *Rakenteiden Mekaniikka*, 54 (4): 143–171, 2021. <https://doi.org/10.23998/rm.107868>
- [10] N. Hoff, S. Mautner. Bending and buckling of sandwich beams. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 15 (12): 707–720, 1948.
- [11] S. Malmi. Kaksipaarteisen Sandwich-palkin tarkka dynaaminen analyysi elementtimenetelmällä (Exact dynamic analysis of two-faced sandwich beam using finite element analysis). *Master Thesis, Tampere University of Technology*, Tampere, 1987.
- [12] A. Möttönen. Kaksipaarteisen sandwich-palkin tarkka elementtimenetelmä taivutuspuristuksessa ja lämpökuormituksessa (Exact finite element method of two-faced sandwich beam in bending/compression and in thermal loading). *Master Thesis, Tampere University of Technology*. Tampere, 1987.
- [13] N. Newmark, C. Seiss, I. Veist. Test and analysis of composite beams with incomplete interactions. *Proceedings Society for Experimental Stress Analysis*, 9 (1): 75–92, 1951.
- [14] H. Parland. Yhdistettyjen puukannattajien lujuus (Strength of composite wooden structures). Helsinki, 1946.
- [15] T. Partanen. On the application of beam on elastic foundation theory to the analysis of stiffened plate strips. *Doctoral Thesis, Lappeenranta University of Technology*, Finland. 1999.

- [16] P. Pleskov. Teoriia rascheta dereviannykh sostavnnykh sterzhnei (Theoretical studies of composite wood structures). Moscow, 1952.
- [17] M. Sciomenta, A., Di Egidio, C. Bedon, M. Fragiaco. Linear model to describe the working of three layers CLT strip slab_ Experimental and numerical validation. *Advances in Structural Engineering*, 24 (14): 3118–3132, 2021.
<https://doi.org/10.1177/13694332211020403>

Markku Heinisuo
Tampereen yliopisto
PL 600, 33014 Tampereen yliopisto (Hervannan kampus)
markku.heinisuo@tuni.fi