

Tekninen selvitys: Tarkka liittopalkkielementti helposti

Avainsanat: liittopalkki, joustava liitos, analyttinen ratkaisu, palkkielementti

Julkaistu verkossa: 27.3.2024.

Johdanto

Lähteessä [1] esitettiin käytäntö, jolla voidaan muodostaa tarkkoja palkkielementtejä systemaattisesti ja mahdollisimman vähällä työllä. Tässä artikkelissa tarkastellaan liittopalkkielementtiä. Ensin johdetaan liittopalkin analyttinen ratkaisu integrointivakioiden avulla lausuttuna. Sitten johdetaan elementtien vapausastesiirtymien ja vapausastevoimien sekä integrointivakioiden välisissä yhteyksissä esiintyvät matriisit \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{a}}$, \mathbf{B} , $\bar{\mathbf{F}}$. Näiden avulla saadaan helposti elementin jäykkymatriisi ja kuormitusvektori sekä tarkat siirtymä- ja voimasuureet elementin alueella lähteessä [1] kuvatulla tavalla.

Liittopalkin yhtälöitä

Tarkastellaan kahdesta osapalkista 1 ja 2 koostuvaa liittopalkkia, jonka liitos on joustava. Sen poikkileikkaus on kuvan 1a mukainen. Koordinaatiston origo on asetettu vetokeskiöön (kimmomoduuleilla painotettuun pintakeskiöön) C, jolloin on voimaassa yhteys

$$-E_1 A_1 e_1 + E_2 A_2 e_2 = 0, \quad (1)$$

missä E_i , A_i ja e_i ($i=1,2$) ovat osapalkkien kimmomoduulit, pinta-alat ja pintakeskiöiden etäisyydet vetokeskiöstä C.

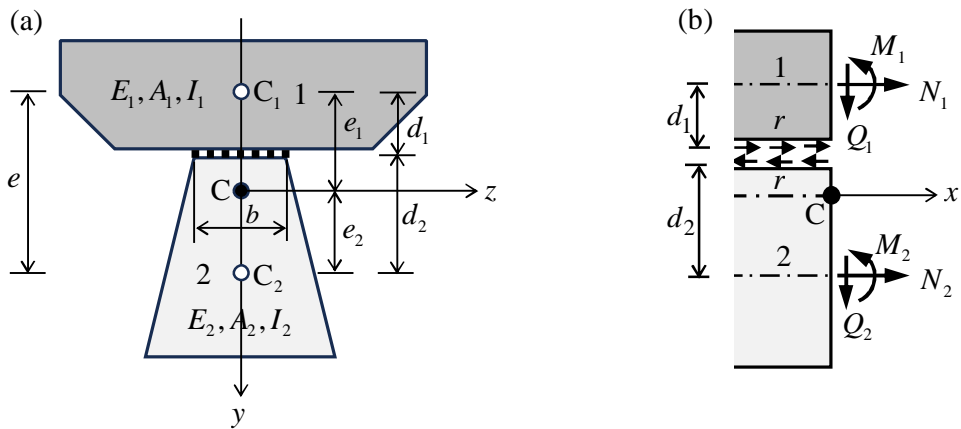
Osapalkit ovat Euler–Bernoulli palkkeja, joiden taipumat otaksutaan yhtä suuriksi $v(x)$. Deformaatiossa (kuva 2) ne pääsevät liukumaan toistensa suhteen siirtymäeron ollessa $\Delta(x)$. Osapalkkien pintakeskiöiden välisen janan $C_1 C_2$ kiertymäkulmaa $\theta_c(x)$ kutsutaan liittopalkin kiertymäksi ja liukumisesta aiheutuvaa kulmaa

$$\gamma = \arctan(\Delta / e) \approx \Delta / e \quad (2)$$

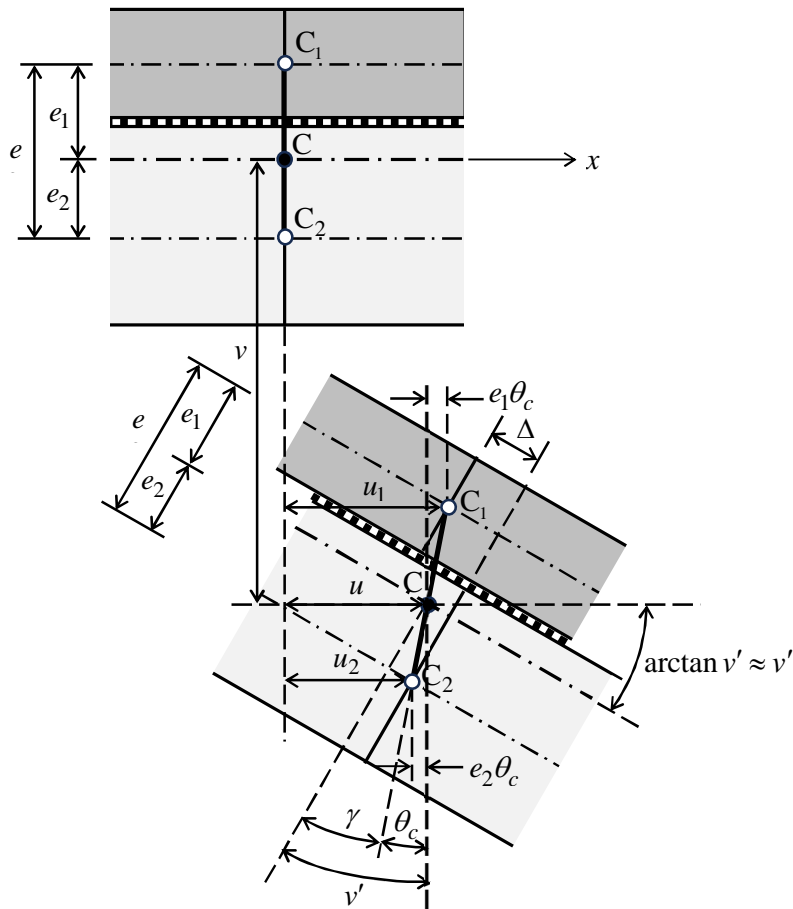
sen liukumakulmaksi. Liittopalkin kiertymällä $\theta_c(x)$ ja osapalkkien kiertymällä $\theta_b(x)$ on kuvan 2 perusteella

$$\theta_c = v' - \gamma, \quad \theta_b = v', \quad (3)$$

missä $v'(x)$ on akselin kiertymä.



Kuva 1. Liittopalkin (a) poikkileikkaus ja (b) osapalkkien voimasuureet



Kuva 2. Liittopalkin deformaatio

Liitoksen otaksutaan toimivan lineaarisesti kimmoisesti siten, että liitospinnan keskimääräisellä leikkausjännityksellä $\tau(x)$ ja osapalkkien siirtymäerolla on yhteys

$$\tau = k\Delta,$$

missä k on jäykkyyskerroin. Liitoksen leikkausvuolle $r(x)$ (kuva 1b) saadaan

$$r \equiv \tau b = kb\Delta = kbe\gamma, \quad (4)$$

missä b on palkkien liitospinnan leveys.

Kuvassa 1b on esitetty osapalkkien jännitysresultantit N_i , Q_i , M_i , ($i=1,2$) ja leikkausvuo r . Osapalkkien differentiaaliset momenttitasapainoyhtälöt ovat

$$Q_1 = M_1' + rd_1, \quad Q_2 = M_2' + rd_2, \quad (5)$$

missä d_1 ja d_2 ovat osapalkkien pintakeskiöiden etäisyydet liitoksesta. Liittopalkin jännitysresultanteiksi valitaan normaalivoima $N = N_1 + N_2$, leikkausvoima $Q = Q_1 + Q_2$, liittovaikutuksen taivutusmomentti $M_c = -N_1e_1 + N_2e_2$ (c, composite action) ja osapalkkien taivutusmomenttisolmu $M_b = M_1 + M_2$ (b, beam action). Tässä otaksutaan, että palkkia kuormittaa vain poikittainen kuormitus, jolloin $N = 0$. Leikkausvoimalle saadaan

$$Q \equiv Q_1 + Q_2 = M_1' + M_2' + r(d_1 + d_2) = M_b' + re. \quad (6)$$

Kuvan 2 perusteella nähdään, että osapalkkien aksiaaliset siirtymät ovat

$$u_1 = u + e_1\theta_c, \quad u_2 = u - e_2\theta_c. \quad (7)$$

Osapalkkien normaalivoimille saadaan

$$N_1 \equiv E_1A_1u_1' = E_1A_1u' + E_1A_1e_1\theta_c', \quad N_2 \equiv E_2A_2u_2' = E_2A_2u' - E_2A_2e_2\theta_c'. \quad (8)$$

Liittovaikutuksen taivutusmomentille saadaan

$$M_c \equiv -N_1e_1 + N_2e_2 = (-E_1A_1e_1 + E_2A_2e_2)u' - (E_1A_1e_1^2 + E_2A_2e_2^2)\theta_c' \quad (9)$$

ja ottamalla huomioon yhteys (1) tulos

$$M_c = -B_c\theta_c', \quad (10)$$

missä

$$B_c = E_1A_1e_1^2 + E_2A_2e_2^2 \quad (11)$$

on vastaava taivutusjäykkyys. Osapalkkien taivutusmomenteille saadaan

$$M_1 = -E_1I_1\theta_b', \quad M_2 = -E_2I_2\theta_b', \quad (12)$$

missä I_1 ja I_2 ovat osapalkkien jäyhyysmomentit (oman pintakeskiöakselinsa suhteen) ja niiden summalle

$$M_b \equiv M_1 + M_2 = -B_b\theta_b' = -B_bv'', \quad (13)$$

missä

$$B_b = E_1I_1 + E_2I_2 \quad (14)$$

on vastaava taivutusjäykkyys. Palkin kokonaistaivutusmomentille saadaan

$$M \equiv M_c + M_b = -B_c\theta_c' - B_b\theta_b' = -B_c(v'' - \gamma') - B_bv'' = -Bv'' + B_c\gamma', \quad (15)$$

missä

$$B = B_c + B_b \quad (16)$$

on koko poikkileikkauksen taivutusjäykkyys. Sijoittamalla tulos (13) ja (4) leikkausvoiman lausekkeeseen (6) saadaan

$$Q = -B_bv''' + kbe^2\gamma. \quad (17)$$

Sijoittamalla lausekkeet (17) ja (15) koko palkin differentiaaliin tasapainoyhtälöihin $Q' + q = 0$ ja $M' = Q$ saadaan taipumalle $v(x)$ ja liukumakulmalle $\gamma(x)$ differentiaaliyhtälöpari

$$-B_bv^{(4)} + kbe^2\gamma' + q = 0, \quad B_c(v''' - \gamma'') + kbe^2\gamma = 0. \quad (18)$$

Sen yleinen ratkaisu on

$$\begin{aligned} v &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + C_5 \cosh \frac{\lambda}{l}x + C_6 \sinh \frac{\lambda}{l}x + \bar{v}, \\ \gamma &= -6 \frac{B_c}{S} C_4 + C_5(1 + \alpha) \frac{\lambda}{l} \sinh \frac{\lambda}{l}x + C_6(1 + \alpha) \frac{\lambda}{l} \cos \frac{\lambda}{l}x + \bar{\gamma}, \end{aligned} \quad (19)$$

missä on otettu käyttöön dimensiottomat vakiot

$$\lambda = l \sqrt{\frac{kbe^2B}{B_cB_b}}, \quad \alpha = \frac{B_b}{B_c}, \quad \beta = \frac{B_c}{kbe^2l^2}. \quad (20)$$

(Ratkaisun voi todentaa sijoituksella.) Kiertymille $\theta_c(x)$, $\theta_b(x)$, taivutusmomenteille $M_c(x)$, $M_b(x)$ ja leikkausvoimalle $Q(x)$ integrointivakioiden C_i , ($i=1, \dots, 6$) avulla lausuttuina saadaan

$$\begin{aligned} \theta_c(x) &= C_2 + 2C_3x + (3x^2 + 6\beta l^2)C_4 - C_5 \frac{\alpha\lambda}{l} \sinh \frac{\lambda x}{l} - C_6 \frac{\alpha\lambda}{l} \cosh \frac{\lambda x}{l} + \bar{\theta}_c(x), \\ \theta_b(x) &= C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 + C_5 \frac{\lambda}{l} \sinh \frac{\lambda x}{l} + C_6 \frac{\lambda}{l} \cosh \frac{\lambda x}{l} + \bar{\theta}_b(x). \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} M_c(x) &= -2B_cC_3 - 6B_cxC_4 + C_5\alpha B_c \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cosh \frac{\lambda x}{l} + C_6\alpha B_c \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \sinh \frac{\lambda x}{l} + \bar{M}_c(x), \\ M_b(x) &= -2B_bC_3 - 6B_bxC_4 - C_5B_b \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \cosh \frac{\lambda x}{l} - C_6B_b \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \sinh \frac{\lambda x}{l} + \bar{M}_b(x), \end{aligned} \quad (22)$$

$$Q(x) = -6BC_4 + \bar{Q}(x).$$

Yksityisratkaisuja $\bar{v}(x)$ ja $\bar{\gamma}(x)$ vastaavat kiertymät, taivutusmomentit ja leikkausvoima lausekkeissa (21) ja (22) ovat

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_c(x) &= \bar{v}'(x) - \bar{\gamma}(x), \quad \bar{\theta}_b(x) = \bar{v}'(x), \\ \bar{M}_c(x) &= -B_c\bar{\theta}_c'(x), \quad \bar{M}_b(x) = -B_b\bar{\theta}_b'(x), \quad \bar{Q}(x) = \bar{M}_c'(x) + \bar{M}_b'(x). \end{aligned} \quad (23)$$

Yksityisratkaisut, kun jakautunut kuorma on tasainen, eli $q(x) = q_0$, ovat

$$\bar{v}(x) = \frac{q_0}{24B}x^4, \quad \bar{\gamma}(x) = -\beta l^2 \frac{q_0}{B}x. \quad (24)$$

(Ne voidaan todentaa sijoituksella.) Yksityisratkaisuja vastaaville kiertymille, taivutusmomenteille ja leikkausvoimalle saadaan kaavoilla (23)

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_c(x) &= \frac{q_0}{6B}(x^3 + 6\beta l^2x), \quad \bar{\theta}_b(x) = \frac{q_0}{6B}x^3, \\ \bar{M}_c(x) &= -\frac{q_0}{2} \frac{B_c}{B}(x^2 + 2\beta l^2), \quad \bar{M}_b(x) = -\frac{q_0}{2} \frac{B_b}{B}x^2, \quad \bar{Q}(x) = -q_0x. \end{aligned} \quad (25)$$

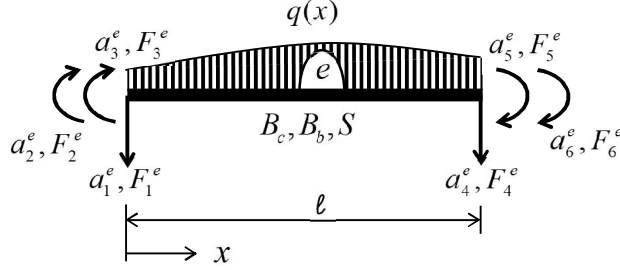
Matriisit \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{a}}$, \mathbf{B} ja $\bar{\mathbf{F}}$

Elementin yleistetyt siirtymävapausasteet ja niiden positiiviset suunnat on esitetty kuvassa 3. Vapausastesiirtymiksi otetaan taipumat a_1^e , a_4^e , liittopalkin kiertymät a_2^e , a_5^e ja osapalkkien kiertymät a_3^e , a_6^e elementin päissä. Vapausastevoimiksi otetaan voimat F_1^e , F_4^e , liittovaikutuksen momentit F_2^e , F_5^e ja osapalkkien momenttisuomat F_3^e , F_6^e elementin päissä. Elementin vapausastesiirtymien ja sisäisten siirtymäsuureiden väliset

yhteensopivuusehdot sekä vapausastevoimien ja sisäisten voimasuureiden väliset tasapainoehdot ovat

$$a_1^e = v(0), a_2^e = \theta_c(0), a_3^e = \theta_b(0), a_4^e = v(l), a_5^e = \theta_c(l), a_6^e = \theta_b(l), \quad (26)$$

$$F_1^e = -Q(0), F_2^e = M_c(0), F_3^e = M_b(0), F_4^e = Q(l), F_5^e = -M_c(l), F_6^e = -M_b(l). \quad (27)$$



Kuva 3. Liittopalkkielementti

Soveltamalla lausekkeita (19a) ja (21) saadaan vapausastesiirtymät (26) lausutuiksi integrointivakioiden avulla muodossa $\mathbf{a}^e = \mathbf{A}\mathbf{C} + \bar{\mathbf{a}}$, missä

$$\mathbf{a}^e = \begin{Bmatrix} a_1^e \\ a_2^e \\ a_3^e \\ a_4^e \\ a_5^e \\ a_6^e \end{Bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6\beta l^2 & 0 & -\frac{\alpha\lambda}{l} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{l} \\ 1 & l & l^2 & l^3 & \text{ch} & \text{sh} \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2(1+2\beta) & -\frac{\alpha\lambda}{l}\text{sh} & -\frac{\alpha\lambda}{l}\text{ch} \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & \frac{\lambda}{l}\text{sh} & \frac{\lambda}{l}\text{ch} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{a}} = \begin{Bmatrix} \bar{v}(0) \\ \bar{\theta}_c(0) \\ \bar{\theta}_b(0) \\ \bar{v}(l) \\ \bar{\theta}_c(l) \\ \bar{\theta}_b(l) \end{Bmatrix} \quad (28)$$

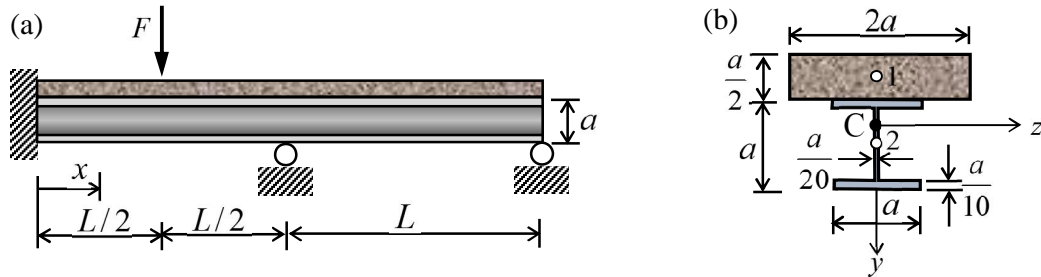
Soveltamalla lausekkeita (22) saadaan vapausastevoimat (27) lausutuiksi integrointivakioiden avulla muodossa $\mathbf{F}^e = \mathbf{B}\mathbf{C} + \bar{\mathbf{F}}$, missä

$$\mathbf{F}^e = \begin{Bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ F_3^e \\ F_4^e \\ F_5^e \\ F_6^e \end{Bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 6B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2B_c & 0 & \alpha B_c \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2B_b & 0 & -B_b \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2B_c & 6B_c l & -\alpha B_c \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \text{ch} & -\alpha B_c \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \text{sh} \\ 0 & 0 & 2B_b & 6B_b l & B_b \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \text{ch} & B_b \left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 \text{sh} \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{F}} = \begin{Bmatrix} -\bar{Q}(0) \\ \bar{M}_c(0) \\ \bar{M}_b(0) \\ \bar{Q}(l) \\ -\bar{M}_c(l) \\ -\bar{M}_b(l) \end{Bmatrix}. \quad (29)$$

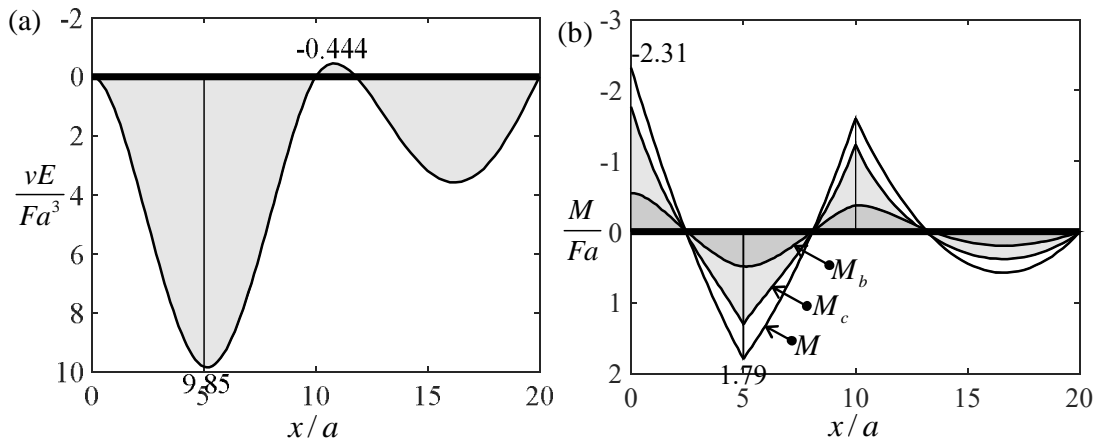
Lausekkeissa (28) ja (29) on käytetty lyhennysmerkintöjä $\text{sh} = \sinh \lambda$ ja $\text{ch} = \cosh \lambda$. Näin saatiin matriisit \mathbf{A} , $\bar{\mathbf{a}}$, \mathbf{B} ja $\bar{\mathbf{F}}$ johdetuiksi liittopalkkielementille. Niiden avulla saadaan lähteessä [1] kuvatulla tavalla määritetyksi liittopalkkielementin jäykkyysmatriisi ja kuormitusvektori sekä tarkat siirtymä- ja voimasuureet elementin alueella.

Esimerkki

Kuvan 4 kaksiaukkoista liittopalkkia kuormittaa pistekuorma F ensimmäisen jänteen keskipisteessä ja oma paino $g = F/L$. Palkin vasen pää on jäykästi kiinnitetty siten, että $v(0) = 0$, $\theta_c(0) = 0$, $\theta_b(0) = 0$, ja oikea pää vapaasti tuettu siten, että $v(2L) = 0$, $M_c(2L) = 0$, $M_b(2L) = 0$. Osapalkkien kimmomoduulit ovat $E_1 = E$, $E_2 = 15E$ ja liitoksen jäykkyyserroin $k = 0,5 \cdot E/a$. Kuvan pituusmitoille on voimassa $L = 10a$. Taivutusjäykkyyksille saatiin $B_c \approx 0,44022Ea^4$, $B_b \approx 0,66283Ea^4$, $B \approx 1,1031Ea^4$. Kuvassa 5 on esitetty laskelman tuloksena saadut taipuman ja taivutusmomenttien jakaumat.



Kuva 4. (a) kaksiaukkoisen liittopalkki (b) poikkileikkaus



Kuva 5. (a) taipuma $v(x)$ ja (b) taivutusmomentit $M(x)$, $M_c(x)$ ja $M_b(x)$

Viitteet

- [1] J. Aalto, Tarkkoja elementtejä helposti, Rakenteiden Mekaniikka, vol. 56, nro 4, 2023, s. 199–204.

Jukka Aalto
Aalto-yliopisto, Insinöörityönteiden korkeakoulu
PL 12100, 00076 Aalto, Finland
jukka.aalto@aalto.fi