

Kanaviston seinämävirtaus

Eero-Matti Salonen¹ ja Rauno Holopainen

Tiivistelmä Artikkelissa tarkastellaan tavanomaisten massataseesta, liikemäärätaseesta ja mekaanisen energian taseesta johdettujen kanavisto-osaan liittyvien yhtälöiden muuttumista, kun kanaviston seinämän läpi tapahtuu virtausta. Liikemäärätaseen soveltaminen tuottaa Bernoullin yhtälön tyyppisen muodon, jossa dynaamisen paineen kertoimen $1/2$ sijasta esiintyykin kerroin 1. Joitakin alan kirjallisuuslähteitä referoidaan. Sovelluksena tarkastellaan suutinkanavavirtausta.

Avainsanat: kanavistovirtaus, seinämävirtaus, massatase, liikemäärätase, mekaanisen energian tase, Bernoullin yhtälö, suutinkanava

Vastaanotettu: 5.10.2023. *Hyväksytty:* 20.12.2023. *Julkaistu verkossa:* 22.12.2023.

Johdanto

Kaivosten ilmanvaihdossa käytettyjen kangastyypisten putkistojen seinämien läpi tapahtuva tahaton vuoto [1] ja rakennusten ilmanvaihdon suutinkanavien toiminta [2] ovat eräänlaisia ääriesimerkkejä kanaviston seinämävirtauksesta. Seinämävirtaus mutkistaa huomattavasti virtauksen mallintamista. Artikkelissa käsitellään tätä aihetta tarkastellen erityisesti massataseen, liikemäärätaseen ja mekaanisen energian taseen tuottamien tavanomaisten lausekkeiden muuttumista seinämävirtauksen yhteydessä. Joitakin alan kirjallisuudessa esiintyviä mallinnuksia referoidaan. Sovellusesimerkkinä tarkastellaan suutinkanavan tapausta.

Taseyhtälöt

Kanavistovirtausta käsitellään seuraavassa pitäen virtaavaa ilmaa normaaliin tapaan niin sanottuna newtonilaisena fluidina. Toimitaan kiinteän suljetun kontrollipinnan S ja vastaavan kontrollitilavuuden V avulla. Käydään ensin lyhyesti läpi jatkossa esiintyvät taseyhtälöt. Käsitelyyn pelkistämiseksi tarkastellaan pysyvää virtausta (engl. steady flow) ja ilman tiheys ρ otaksutaan vakioksi. (Tämän luvun kaavoissa ρ säilytetään kuitenkin vielä integraalimerkkien sisäpuolella.)

¹Vastuullinen kirjoittaja: eeromatti.salonen@gmail.com

Massataseyhtälö on

$$\int_S \rho v_n \, dS = 0, \quad (1)$$

jossa $v_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ on virtausnopeuden \mathbf{v} komponentti pinnan S ulkoisen yksikkönormaali-vektorin \mathbf{n} suunnalle.

Liikemäärätaseyhtälö on

$$-\int_S p n_x \, dS + \int_S (n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}) \, dS - \int_V \rho g \mathbf{i} \cdot \mathbf{e} \, dV = \int_S \rho v_x v_n \, dS. \quad (2)$$

Tämä on liikemäärätaseyhtälön (yleisesti vektoriyyhtälö) x -akselin suunnalle kirjoitettu komponenttimuoto. Jännitystensori σ_{ij} on jaettu esimerkiksi lähteessä [3] esitettyyn tapaan paineosuuteen $-p\delta_{ij}$ ja deviatoriseen eli viskoosiin osaan τ_{ij} . Lisäksi on siirrytty xyz -koordinaatistoon liittyviin tuttuihin merkintöihin. Ylöspäin suunnattua yksikkövektoria on merkitty tunnuksella \mathbf{e} . Tilavuusvoimana on vektorin \mathbf{e} vastakkaiseen suuntaan vaikuttava painovoima ja g on putoamiskiihtyvyyden arvo. Tässä syntyy tilapäisesti merkinnällistä ristiriitaa johtuen siitä, että x -koordinaatti valitaan jatkossa (ja muutenkin yleisesti) seuraamaan kanavan akselia ja toisaalta tunnus z merkitsee virtauslaskennassa yleisesti (ja tässä myöhemmin) ylöspäin suunnattua koordinaattia.

Mekaanisen energian taseyhtälö on

$$-\int_S p v_n \, dS - \int_S \frac{1}{2} \rho v^2 v_n \, dS - \int_S \rho g z v_n \, dS = D - \int_S t_i^\tau v_i \, dS, \quad (3)$$

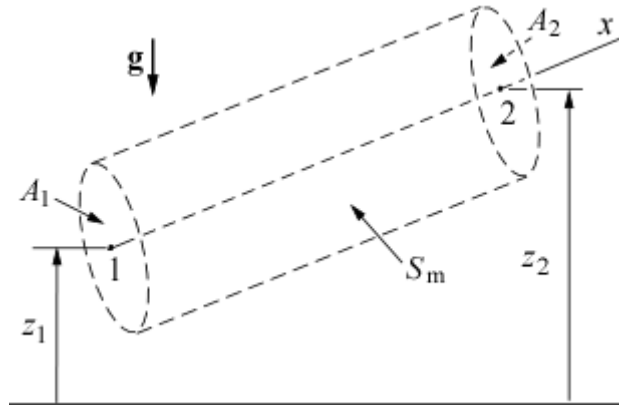
jossa v^2 on virtausvauhdin neliö, D dissipaatio ja viimeinen termi esittää viskoosien traktioiden tehoa [3].

Esitetyt kolme taseyhtälöä ovat yleensä riittäviä kanavistovirtauksen mallintamisessa. (Jos tehtävässä esiintyy oleellista lämmönsiirtoa, on kuitenkin otettava käyttöön varsinainen energian taseyhtälö.) Tavanomaisessa — ei seinämävirtausta — esiintyvässä tapauksessa mekaanisen energian taseyhtälön soveltaminen on huomattavasti joustavampaa kuin liikemäärätaseen käyttö. Osoittautuu kuitenkin, että tilanne muuttuu melko päinvastaiseksi seinämävirtauksen yhteydessä.

Kanava; ei seinämävirtausta

Geometria

Tarkastelun kohteena on kuvan 1 esittämä erittäin pelkistetty tapaus: poikkileikkaukseltaan muuttumaton kanavan osa (poikkileikkaus ympyrä, halkaisija d , pituus L).



Kuva 1. Kanavaosuuden geometriaa.

Itse kanavan fyysisiä seinämiä ei ole esitetty; kuvassa on kyseessä suoraan tarkasteltava kontrollitilavuus V . Sen kontrollipinta S muodostuu taso-osista (poikkileikkauksista) A_1 ja A_2 (pinta-alat $A = \pi d^2 / 4$) ja sylinterimäisestä fyysiseen seinämään (engl. mantle) yhtyvistä osuudesta S_m . Poikkileikkausten A_1 ja A_2 keskipisteet ovat korkeusasemissa z_1 ja z_2 ja niiden kautta kulkeva x -akseli on suunnattu kohdasta 1 kohtaan 2. Osuuden S_m läpi ei tapahdu virtauksen takertumisehdon ($\mathbf{v} = \mathbf{0}$) johdosta tässä siis virtausta.

Massatase

Massataseyhtälö (1) saa muodon (tasolla A_1 $v_n = -v_x$, tasolla A_2 $v_n = v_x$, pinnalla S_m $\mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow v_n = 0$)

$$-\rho \int_{A_1} v_x dA + \rho \int_{A_2} v_x dA = 0. \quad (4)$$

Otetaan käyttöön poikkileikkauksiin liittyvä niin sanottu pinta-alakeskiarvomerkinä (engl. surface average):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{A} \int_A f dA, \quad (5)$$

jossa f on yleisesti jokin poikkileikkauksen alueella paikasta riippuva suure. Kaavasta (4) tulee siis seuraavaksi

$$-\rho \langle v_x \rangle_1 A + \rho \langle v_x \rangle_2 A = 0 \quad (6)$$

tai vielä yksinkertaisemmin

$$\langle v_x \rangle_1 = \langle v_x \rangle_2. \quad (7)$$

Merkitsemällä tilavuusvirtaa $\langle v_x \rangle A$ tavanomaiseen tapaan tunnuksella Q päädytään vaihtoehtoiseen yhtälöön

$$-Q_1 + Q_2 = 0. \quad (8)$$

Liikemäärätase

Liikemäärätaseyhtälö (2) saa ensin muodon (tasolla A_1 $n_x = -1$, $v_n = -v_x$ tasolla A_2 $n_x = 1$, $v_n = v_x$, pinnalla S_m $n_x = 0$)

$$\int_{A_1} p \, dA - \int_{A_2} p \, dA + \int_{S_m} (n_y \tau_{yx} + n_z \tau_{zx}) \, dS - \rho g A L \mathbf{i} \cdot \mathbf{e} = -\rho \int_{A_1} v_x^2 \, dA + \rho \int_{A_2} v_x^2 \, dA. \quad (9)$$

Tässä on jätetty tavanomaiseen tapaan tasoilla A_1 ja A_2 yhtälössä (2) esiintyvä viskoosin traktion $n_x \tau_{xx}$ osuus pieneksi arvioituna pois. Kaavan (9) traktio osuudella S_m kirjattuna leikkausjännityksenä $-\tau$ (τ positiivinen, kun virtaus tapahtuu positiivisen x -akselin suuntaan) on kuitenkin oleellinen. Uusin merkinnöin saadaan siis jakamalla vielä pinta-alalla A ($L \mathbf{i} \cdot \mathbf{e} = z_2 - z_1$)

$$\langle p \rangle_1 + \rho \beta \langle v_x \rangle_1^2 + \rho g z_1 = \langle p \rangle_2 + \rho \beta \langle v_x \rangle_2^2 + \rho g z_2 + \frac{1}{A} \int_{S_m} \tau \, dS. \quad (10)$$

On otettu lisäksi käyttöön liikemäärän korjaustekijä (engl. momentum correction factor)

$$\beta = \langle v_x^2 \rangle / \langle v_x \rangle^2. \quad (11)$$

Kun otetaan vielä huomioon massataseen (7) sisältö, päädytään lyhyeen muotoon

$$\langle p \rangle_1 + \rho g z_1 = \langle p \rangle_2 + \rho g z_2 + \frac{1}{A} \int_{S_m} \tau \, dS. \quad (12)$$

Tämän yhtälön käytännön sovelluksissa on tietenkin oltava vielä käytössä arvio yhtälön viimeisestä termistä, niin sanotusta painehäviöstä (engl. pressure loss). Tästä aiheesta esiintyy alan kirjallisuudessa paljon kokeellisesti saatua tietoa; esimerkiksi [4, 790 sivua].

Mekaanisen energian tase

Mekaanisen energian taseen periaatteen käsittelyä on selostettu esimerkiksi lähteessä [3]. Kuvan 1 geometrian tapauksessa saadaan lopuksi muoto

$$Q_1 \left[\langle p \rangle_1 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_1^2 + \rho g z_1 \right] - Q_2 \left[\langle p \rangle_2 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_2^2 + \rho g z_2 \right] = D. \quad (13)$$

Tässä α on liike-energian korjaustekijä. Tarvittavina otaksumina on lähinnä, että virtaus on poikkileikkauksissa x -akselin suuntainen. Viskoosien traktioiden tehotermi tasoilla A_1 ja A_2 on myös jätetty pieneksi otaksuttuna pois. Kun otetaan huomioon tulos (8) eli $Q_1 = Q_2 \equiv Q$, saadaan seuraavaksi jakamalla termillä Q muoto

$$\langle p \rangle_1 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_1^2 + \rho g z_1 = \langle p \rangle_2 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_2^2 + \rho g z_2 + \frac{D}{Q}. \quad (14)$$

Edelleen kaavan (7) perusteella päädytään yhtälöön

$$\langle p \rangle_1 + \rho g z_1 = \langle p \rangle_2 + \rho g z_2 + \frac{D}{Q}. \quad (15)$$

Vertaamalla kaavaan (12) nähdään myös yhteys

$$D = \langle v_x \rangle \int_{S_m} \tau \, dS. \quad (16)$$

Terminologiaa liittyen voitaisiin todeta seuraavaa. Yhtälöiden (12) ja (15) viimeisestä termistä käytetään yleisesti nimitystä painehäviö (engl. pressure loss) tai kitkahäviö (engl. friction loss). Jälkimmäinen nimitys on osuva, koska kaavassa (12) näkyy tosiaan leikkausjännitys eli "kitka" ja toisaalta myös kaavan (15) dissipaatio D voidaan tulkita nesteen sisäisen kitkan synnyttämäksi termiksi. Painehäviö on kuitenkin alan terminologiassa ilmeisesti tavallisempi nimitys ja sikäli hyväksyttävä, että kyseisellä häviöllä on vastaavassa kaavassa paineen dimensio. Tässä tullaan jatkossa käyttämään nimitystä painehäviö.

Huomautuksia

Edellä käsitellyssä hyvin pelkistetyssä kuvan 1 geometriaan liittyvässä tapauksessa liikemäärätase ja mekaanisen energian tase antoivat siis lopuksi saman loppuyhtälön. Tämä ei päde kuitenkaan yleisemmissä tilanteissa. Tavanomaisessa kanavisto-virtauksessa mekaanisen energian taseyhtälön soveltaminen on erittäin käyttökelpoinen lähestymistapa, koska virtaus häviää takertumisehdon takia kanaviston seinämällä ja tästä johtuen niiltä ei synny lainkaan osuuksia. Lisäksi on oleellista, että pysyvässä vakiotiheysnesteen virtauksessa tilavuusvirta $Q_1 = Q_2 \equiv Q$ ja yhtälössä (13) voidaan suorittaa tällä termillä jakaminen. Tällöin päädytään yhtälöön (14) ilman rajoitusta (7) eli toisin sanoen poikkileikkausten A_1 ja A_2 ei tarvitse olla yhtä suuria. Tämä merkitsee, että tyyppiä (14) olevaa yhtälöä voidaan soveltaa myös (lievin tarkistuksin) poikkileikkauksiltaan muuttuvien ja akseliltaan kaareutuvien kanavaosien tapauksissa. Tässä muodossa yhtälöön (14) liitetään tavalla taikka toisella usein nimitys Bernoullin yhtälö tai Bernoullin laki jne. Vastakohtaisesti sen sijaan liikemäärätaseen soveltaminen vaikeutuu vastaavissa tapauksissa. Jos esimerkiksi kuvan 1 geometriaa muutetaan poikkileikkaukseltaan x :n suhteen muuttuvaksi, tulisi kontrollipinnalta S_m ottaa huomioon kaarevilta osilta jo paineen p x -akselin suuntaan antamat osuudet, joka olisi melko mutkikasta.

Seinämvirtauksessa mekaanisen energian taseyhtälön eli Bernoullin lain "edut" kuitenkin katoavat. Esimerkiksi kuvan 1 geometriaan liittyen mekaanisen energian taseyhtälöön (13) ilmestyisi pinnalta S_m lisätermi

$$-\int_{S_m} p v_n \, dS - \int_{S_m} \frac{1}{2} \rho v^2 v_n \, dS - \int_{S_m} \rho g z v_n \, dS, \quad (17)$$

jossa on vielä jo jätetty viskoosien traktioiden osuus pois. Termin (17) huomioonotto tuntuu hankalalta. Vastakohtana todettakoon, että seinämvirtauksessa liikemäärätaseen soveltamisessa kuvan 1 geometriassa mukaan tulee siedettävämpi lisätermi

$$\int_{S_m} \rho v_x v_n \, dS. \quad (18)$$

Kuitenkin oleellisempi ongelma on, että seinämävirtauksen yhteydessä $Q_1 \neq Q_2$ ja jakamalla yhtälö (13) — mukana nyt myös lisätermi (17) — tilavuusvirralla Q_1 jättää jäljelle osuuden, jonka kertojana ei ole enää luku 1 vaan mutkistava arvo Q_2/Q_1 . Edellisistä syistä johtuen tämän artikkelin jatkokäsittelyssä rajoitutaan tarkastelemaan vain kuvan 1 mukaista geometriaa ja mekaanisen energian taseen periaatetta ei yritetä lainkaan soveltaa.

Todettakoon vielä, että ilmapirtauksen käsittelyssä liikemäärätaseyhtälöissä ja mekaanisen energian taseyhtälöissä edellä näkyvät tyyppiä ρgz olevat korkeus- eli asematermit tunnetusti katoavat, jos painetta käsitellään niin sanottuna mittapaineena (engl. gage pressure) (paine-ero ulkotilan paineen suhteen vastaavassa korkeusasemassa), edellyttäen vielä, että ulkotilan ilman tiheys on sama kuin kanaviston ilman tiheys. Tämä selittää, miksi esimerkiksi tavanomaisissa ilmanvaihtoa koskevissa laskelmissa voidaan usein jättää asematermit pois.

Reuna-arvotehtävä

Kuvan 1 kanavisto-osa voisi esittää esimerkiksi laajemman kanaviston kahden haarautumiskohdan välistä osuutta. Voitaisiin vaikka otaksua, että arvot Q_1 ja p_1 tunnetaan ja on määritettävä arvot Q_2 ja p_2 . Tästä lähtien luovutaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi keskiarvomerkin $\langle \rangle$ käytöstä paineen p ja virtausnopeuden v_x suhteen ja jätetään myös alaviite x pois.

Asetelma on tässä niin yksinkertainen, että on ehkä liioiteltua puhua reuna-arvotestävistä etenkin, kun yhtään differentiaaliyhtälöä ei ole esillä. Ratkaisu syntyy suoraan kaavoista (8) ja (12). Huomattakoon, että yhtälössä (12) z_1 ja z_2 ovat annettuja suureita ja viimeinen integraali saadaan siis mahdollisuuksien mukaan kirjallisuuden antamana painehäviöterminä.

Kanava; seinämävirtaus mukana

Seinämävirtaus

Edellä esitetyt virtausyhtälöt ovat ehkä turhankin tuttuja virtausmekaniikan tuntijalle. Ne on kuitenkin haluttu kirjata, jotta erot seinämävirtauksen vaikutuksesta tulisivat korostetusti esille. Kohteena on siis edelleen kuvan 1 esittämä yksinkertainen geometria. Otaksutaan, että kanavan huokoisuus tai aukkoisuus (engl. porosity) seinämäosuudella S_m on vakio kanavan pituuskoordinaatin x suhteen. Esimerkiksi suutinkanavan käsittelyssä ei yritetä ymmärrettävistä syistä tarkastella erikseen lukuisten pienten suutinaukkojen erillisiä osuuksia vaan otaksutaan, että niiden vaikutus voidaan kuvata jollain tarkkuudella jatkuvasti jakautuneella mallilla.

Tavanomainen seinämän aukkoon liittyvä virtaus kuvataan tyyppillisesti muodossa

$$v_n = C_d \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}, \quad (19)$$

jossa v_n on aukon läpi kulkevan virtauksen aukon normaalin suuntainen keskimääräinen nopeuskomponentti ja C_d dimensioton suure; niin sanottu purkautumiskerroin (engl. discharge coefficient). Δp on "sopivalla tavalla" määritelty paine-ero. Tässä paine-eroksi otetaan yksinkertaisesti kanavaosuuden poikkileikkauksessa vallitseva keskimääräinen paine $p(x)$ (ylipaine ulkotilan paineen suhteen), jolloin sovelluskaava on siis

$$v_n = C_d \sqrt{\frac{2p}{\rho}}. \quad (20)$$

(Jos kyseessä onkin virtaus ulkotilasta kanavan sisään, jolloin paine-erona on ulkotilan paine miinus kanavistopaine, kaava tulee varustaa miinusmerkillä.) Kuvan 1 geometrian omaavan kanavan seinämän pinta-ala on

$$S_m = \pi d L. \quad (21)$$

Aukkojen (engl. opening, orifice) todellista pinta-alaa merkitään tunnuksella S_o . Määritellään lähteen [4] mukaisesti niin sanottu aukkoisuus tai huokoisuus tekijä (engl. porosity factor)

$$\varepsilon' = \frac{S_o}{S_m} = \frac{dS_o}{dS_m}. \quad (22)$$

Merkitään kanavan pituusalkion dx osuudella seinämän (tarkemmin kontrollipinnan) läpi (pinta-ala $dS_m = \pi dx$) kulkevaa tilavuusvirtaa tunnuksella dQ_m . Tällöin seinämän läpi tapahtuva näennäinen (otaksutaan tasainen jakauma) keskimääräinen virtausvauhti

$$v_m = \frac{dQ_m}{dS_m} = \frac{1}{\pi d} \frac{dQ_m}{dx}. \quad (23)$$

Aukkoihin syntyvä todellinen keskimääräinen virtausvauhti v_n on kuitenkin siis

$$v_n = \frac{dQ_m}{dS_o} = \frac{1}{\varepsilon'} \frac{dQ_m}{dS_m} = \frac{1}{\varepsilon' \pi d} \frac{dQ_m}{dx}. \quad (24)$$

Yhdistämällä kaavat (20) ja (24) saadaan lopuksi yhtälö

$$\frac{dQ_m}{dx} = \varepsilon' d \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p^{1/2}. \quad (25)$$

Lähteessä [1] esiintyy (tämän artikkelin merkisäännöin ja osittaisin merkinnöin) edellistä kaavaa yleisempi muoto

$$\frac{dQ_m}{dx} = k p^\mu, \quad (26)$$

jossa k on "leakage constant" ja μ "constant depending on the nature of the leakage holes". Samassa lähteessä todetaan myös (vapaasti kääntäen), "että eksponentti μ voi saada arvoja välillä 1 ja 0,5 riippuen siitä, onko vuotoilmiö viskoosia virtausta kapillaarisista aukoista vai kitkatonta virtausta." Kaava (25) viittaisi siis jälkimmäiseen tapaukseen. Artikkelissa todetaan myös, että arvo $\mu=0,5$ on käytössä "in ventilation engineering". On ilmeistä, että suureiden k ja μ arvojen valinta eri seinämätyypeille vaatii yleensä kokeellisesta toimintaa.

Massatase

Kuvan 1 kontrollialueeseen liittyvään massataseyhtälöön (4) tulee pinnalta S_m yhtälön (1) mukaisesti lisäosuus

$$\rho \int_{S_m} v_n dS \equiv \rho Q_m, \quad (27)$$

jossa Q_m on siis jo edellä käytettyjen merkintöjen mukaisesti seinämän läpi tapahtuva tilavuusvirta (ulosvirtaus positiivisena). Yhtälö (8) muuntuu täten muotoon

$$-Q_1 + Q_2 + Q_m = 0. \quad (28)$$

Jatkossa tullaan tarvitsemaan jonkin verran myös differentiaaliyhtälöiden muodossa olevia kaavoja. Tulkitsemalla yhtälöä (28) kuvan 1 merkinnöistä poiketen tilapäisesti niin, että pisteessä 1 paikkamuuttujalla on arvo x ja pisteessä 2 arvo $x+dx$ saadaan tulos

$$-Q(x) + Q(x) + dQ + dQ_m = 0. \quad (29)$$

Jakamalla tämä differentiaalilla dx syntyy ilmeinen differentiaaliyhtälö

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{dQ_m}{dx} = 0. \quad (30)$$

Soveltamalla kaavaa (25) saadaan muoto

$$\frac{dQ}{dx} = -\varepsilon' d \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p^{1/2}, \quad (31)$$

jossa esiintyvät tarkasteltavan virtaustapauksen perustuntemattomat $Q(x)$ ja $p(x)$.

Liikemäärätase

Yhtälön (2) perusteella nähdään, että pinnalta S_m tulee seinämävirtauksen johdosta yhtälön (10) oikealle puolelle jo edellä selostettu lisätermi (18). Täten vallitseva liikemääräyhtälö voidaan kirjata (nyt pelkistetyin merkinnöin) muotoon

$$p_1 + \rho\beta v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \rho\beta v_2^2 + \rho g z_2 + ph, \quad (32)$$

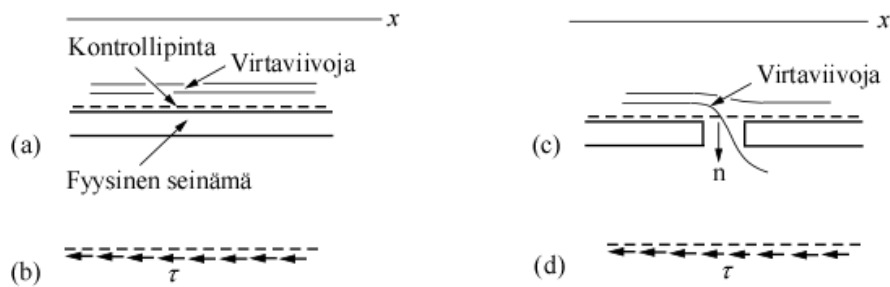
jossa painehäviö

$$ph = \frac{1}{A} \int_{S_m} \tau \, dS + \frac{1}{A} \int_{S_m} \rho v_x v_n \, dS = \frac{1}{A} \int_{S_m} (\tau + \rho v_x v_n) \, dS. \quad (33)$$

Tarkennuksena jälkimmäisen termin integroimisalueeksi voitaisiin asettaa S_o , koska sekä v_x että v_n häviävät aukottomalla seinäosuudella. Lyhennetään vielä lausekkeita merkitsemällä $\bar{\tau} = \tau + \rho v_x v_n$, jolloin ($\bar{\tau}$ on jonkinlainen yleistetty leikkausjännitys)

$$ph = \frac{1}{A} \int_{S_m} \bar{\tau} \, dS. \quad (34)$$

Tarkastellaan syntyvää asetelmaa hieman kuvan 2 avulla.



Kuva 2. (a) Aukoton seinämän osa ja kontrollipinnan osa. (b) Kontrollipinnan osan detajli. (c) Aukollinen seinämän osa ja kontrollipinnan osa. (d) Kontrollipinnan osan detajli.

Kuvassa on otaksuttu kanavistovirtauksen tapahtuvan positiivisen x -akselin suuntaan. Ensinnäkin todetaan, että kun kuvassa 2 (a) kontrollipinta on asetettu yhtymään kanaviston fyysiseen seinämään, seinämä täytyy ajatella poistetuksi kuvan 2 (b) tapaan, jotta fluidia koskeva vapaakappalekuvion osa saadaan esitettyä oikein. Leikkausjännitys τ tulkitaan positiiviseksi, kun se vaikuttaa kuvan tapaan vasemmalle suunnattuna. Kuvissa on myös hahmoteltu mahdollisia virtaviivojen kulkua ja erityisesti kuvassa 2 (c) on esitetty virtausta seinämän aukon läpi. Voisi otaksua, että jos päävirtaus on oikealle, itse aukon kontrollipinnalla v_x on ulosvirtauksessa ainakin lievästi positiivinen, ja kun v_n on ulosvirtauksessa positiivinen, saadaan siis positiivinen osuus $\rho v_x v_n$ kaavassa (33). Toisaalta leikkausjännityksen jakautumista erikseen seinämän ja aukkojen kohdille on ilmeisesti lähes mahdoton arvioida ja eteneminen vaatisi kokeellista käsittelyä.

Usein putki- ja kanavistovirtauksen teknisten sovellusten yhteydessä alan kirjallisuudessa puhutaan tunnetusti niin sanotusta staattisesta paineesta ja dynaamisesta paineesta ja niiden summaa nimitetään kokonaispaineeksi. Virtausta (ilman asema-termiä) kuvataan sitten lyhyesti tyyliin: "kokonaispaine vähennettynä häviöt on vakio kanavan pituussuunnassa" ja puhutaan myös Bernoullin laista tai yhtälöstä. Voidaan todeta, että yhtälö (32) muistuttaa kyllä Bernoullin lakia tai yhtälöä: siinä on yhtälön molemmilla puolilla mukana painetermi, neliöllinen nopeustermi ja myös yleisemmin asematermi. Kuitenkin eräs seikka on huomiota herättävä. Esimerkiksi turbulentsisessä virtauksessa korjaustekijän β tavanomainen approksimaatio on 1. *Täten liikemäärätaseyhtälön (32) neliöllisten termien kertoimena esiintyy luku 1, kun klassisessa Bernoullin laissa kertoimen arvo on 1/2.* Bernoullin lain tavanomainen staattisen ja dynaamisen paineen "pyhä

yhteys" siis katoaa seinämävirtauksen yhteydessä. Tämä voi aiheuttaa ongelmia muun muassa kirjallisuudessa esitettyjen painehäviöiden lausekkeiden tulkinnoissa (tähän palataan artikkelin lopun sovelluksen yhteydessä.)

Yhtälöä (32) vastaava differentiaaliyhtälömuoto voidaan johtaa samaan tapaan kuin massataseen yhteydessä. Saadaan ensin

$$p + \beta\rho v^2 + \rho g z = p + dp + \beta\rho(v + dv)^2 + \rho g(z + dz) + dph, \quad (35)$$

jossa

$$dph = \frac{1}{\pi d^2 / 4} \bar{\tau} \pi d dx = \frac{4}{d} \bar{\tau} dx. \quad (36)$$

Jättämällä toisen kertaluvun differentiaaliset termit pois saadaan seuraavaksi

$$-dp - 2\beta\rho v dv - \rho g dz = dph \quad (37)$$

ja jakamalla vielä differentiaalilla dx ja merkkiä vaihtamalla seuraa yhtälö

$$\frac{dp}{dx} + 2\beta\rho v \frac{dv}{dx} + \rho g \frac{dz}{dx} = -\frac{dph}{dx}, \quad (38)$$

jossa siis vielä

$$\frac{dph}{dx} = \frac{4}{d} \bar{\tau}. \quad (39)$$

Jatkon kaavoja yksinkertaistetaan tarkastelemalla vain vaakasuoraa kanavisto-osaa: $z_1 = z_2$, $dz/dx = 0$. Kaava (38) yksinkertaistuu:

$$\frac{dp}{dx} + 2\beta\rho v \frac{dv}{dx} = -\frac{dph}{dx}. \quad (40)$$

Otetaan vielä käyttöön tilavuusvirta $Q(x) = Av(x)$, jolloin yhtälö saa vaihtoehdoisen muodon

$$\frac{dp}{dx} + 2\beta \frac{\rho}{A^2} Q \frac{dQ}{dx} = -\frac{dph}{dx}. \quad (41)$$

Tämä on yhtälön (31) lisäksi tarkasteltavan virtaustapauksen toinen oleellinen differentiaaliyhtälö, jossa siis esiintyvät tehtävän perustuntemattomat $Q(x)$ ja $p(x)$.

Lähteessä [1] yhtälön (41) vastineena esiintyy (kirjoitettuna tämän artikkelin merkisäännöin ja osittaisin merkinnöin) yhtälö

$$\frac{dp}{dx} = -rQ^\lambda, \quad (42)$$

jossa " r = resistance constant " ja " λ = constant depending on Reynolds number and roughness of duct." Kaavan (42) oikealla puolella on siis jo mukana arvio painehäviös-

tä. Kuitenkin kaavasta puuttuu epälineaarinen konvektiivinen kiihtyvyystermi $v \cdot dv / dx$ tai $Q \cdot dQ / dx$. Se on ehkä ymmärrettävissä esitettyjen kaivosputkistojen sovellusten tapauksessa, joissa termi dv / dx pysyy ilmeisesti hyvin pienenä. Tämä yksinkertaistus mahdollistaa lähteessä [1] suljetussa muodossa esitetyt ratkaisut. Lähteessä [1] on vielä todettu "In most formulae used by ventilation engineers λ is assumed to have the value $2 \cdot 0$ ".

Lähteessä [5] on tarkasteltu ilmanvaihtokanavistojen tahatonta vuotoa soveltaen tyyppiä (40) olevaa yhtälöä niin, että mukana on myös konvektiivinen kiihtyvyystermi. Ratkaisut on saatu numeerisia menetelmiä käyttäen. Kaavan (26) vastineessa on käytetty eksponentin μ arvoa 0,65.

Reuna-arvotehtävä

Ajatellaan jälleen kuten edellisen luvun tapauksessa alustavasti, että tunnetaan kuvan 1 esittämässä tapauksessa esimerkiksi suureet Q_1 ja p_1 on määritettävä arvot Q_2 ja p_2 . Edellisen luvun tapauksessa saatiin ilman laskelmia välittömästi tulos $Q_2 = Q_1$ ja jäljelle jäi vain painehäviön arviointi vakiotilavuusvirran yhteydessä. Nyt asetelma siis vaikeutuu oleellisesti ja täsmällisessä ratkaisurytyksessä täytyy siis soveltaa edellä selostettuja differentiaaliyhtälöitä. Kirjataan yhtälöt (31) ja (41) (on käytetty kaavassa (42) esiintyvää kitkahäviölauseketta ja otaksuttu arvo $\lambda = 2$ ja käytetty hyväksi yhteyttä $A^2 = \pi^2 d^4 / 16$ ja asetettu vielä $\beta = 1$):

$$\frac{dQ}{dx} = -\varepsilon' d \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} p^{1/2}, \quad (43)$$

$$\frac{dp}{dx} + \frac{32\rho}{\pi^2 d^4} Q \frac{dQ}{dx} = -r Q^2. \quad (44)$$

Yhtälöiden nähdään olevan voimakkaasti epälineaarisia tuntemattomien $Q(x)$ ja $p(x)$ suhteen. Tässä ei yritetä suoraan mahdollista numeerista ratkaisua, vaan esitetään seuraavassa jatkon suutinkanasovellukseen ehkä riittävä likimääräinen lähestymistapa.

Kirjataan poikkileikkauksiin 1 ja 2 liittyvät yhtälöt (28) ja (32):

$$-Q_1 + Q_2 + Q_m = 0, \quad (45)$$

$$p_1 + \frac{\rho}{A^2} Q_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{A^2} Q_2^2 + ph. \quad (46)$$

Jälkimmäisessä on asetettu liikemäärän korjaustekijä ykköseksi ja jätetty asematermit pois. Yhtälöt manipuloidaan vielä ensin muotoihin

$$Q_1 - Q_2 = Q_m, \quad (47)$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{\rho}{A^2} (Q_1^2 - Q_2^2) + ph = -\frac{\rho}{A^2} Q_m (Q_1 + Q_2) + ph. \quad (48)$$

Edetään osittain samaan tapaan kuin lähteessä [5]. Suuretta Q_m approksimoidaan ottamalla käyttöön keskimääräinen paine $(p_1 + p_2) / 2$ ja soveltamalla tälle paineelle kaavaa (25) integroituna pituudelle L :

$$Q_m = \varepsilon' d \pi C_d \sqrt{\frac{2}{\rho}} \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{2}} L = \varepsilon' d L \pi C_d \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{\rho}} \equiv c \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{\rho}}. \quad (49)$$

Kun tämä sijoitetaan kaavoihin (47) ja (48), saadaan seuraavaksi yhtälöt

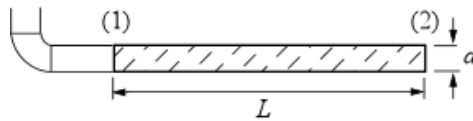
$$Q_1 - Q_2 = c \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{\rho}}, \quad (50)$$

$$p_1 - p_2 = -\frac{\rho}{A^2} c \sqrt{\frac{p_1 + p_2}{\rho}} (Q_1 + Q_2) + ph. \quad (51)$$

Näiden soveltaminen vaatii kuitenkin vielä yleensä painehäviön arviointiin liittyviä iteraatioita.

Suutinkanavasovellus

Tarkastellaan tuloilmajakoon tarkoitettua suutinkanavaa; kuva 3.



Kuva 3. Suutinkanava.

Annettuina tietoina ovat (mitta)paine $p_2 \equiv \bar{p}_2 = 20 \text{ Pa}$ ja tilavuusvirta $Q_2 = 0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$ poikkileikkauksessa 2. On määritettävä paine p_1 ja tilavuusvirta Q_1 poikkileikkauksessa 1.

Geometrisina tietoina ovat kanavan pituus $L = 3 \text{ m}$, halkaisija $d = 0,25 \text{ m}$ ja pinnan huokoisuustekijä $\varepsilon' = 0,01$. Ilmalle otaksutaan lämpötilassa $20 \text{ }^\circ\text{C}$ tiheys $\rho = 1,2 \text{ kg m}^{-3}$ ja kinemaattinen viskositeetti $\nu = 1,51 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Purkautumiskertoimelle otaksutaan arvo $C_d = 0,6$. Vielä kaavassa (49) määritelty lyhennysmerkintä on siis

$$c = \varepsilon' d L \pi C_d. \quad (52)$$

Painehäviön arvioinnissa sovelletaan alustavasti lähteessä [4] esitettyä muotoa (lisämerkintä i viittaa lähteessä [4] esitettyyn arvoon)

$$phi = \zeta \frac{1}{2} \rho v_1^2. \quad (53)$$

Tässä kerroin ζ on "coefficient of friction resistance of the segment of length l " ja sen arvoksi tulee kyseisen lähteen luvun 2 kohdan 87 ($\varepsilon' \leq 0,2$) mukaisesti (nyt tämän artikkelin merkintöjä käyttäen lopuksi)

$$\zeta = \frac{L}{d} \left(\frac{\lambda}{3} + 0,69 \frac{d}{L} \right), \quad (54)$$

jossa λ on sileään seinämään ja kanavanopeuteen v_1 liittyvän Reynoldsin luvun $Re = dv_1/\nu$ Moodyn diagrammin antama kitkatekijä (engl. friction coefficient, friction factor). Nyt kuitenkin on ilman tarkempaa tietoa otaksuttavissa, että lähteessä [4] on operoitu klassillisen Bernoullin lain mukaisesti ajatellen esimerkiksi yhtälö (46) muotoon

$$p_1 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{A^2} Q_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \frac{\rho}{A^2} Q_2^2 + phi, \quad (55)$$

jossa termi phi tarkoittaa siis lähteen [4] antamaa mittauksiin perustuvaa painehäviötä. Kun tässä sovelluksessa vielä $Q_2 = 0 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$, saadaan kaavoja (46) ja (55) vertailemalla yhteys

$$ph = phi + \frac{1}{2} \frac{\rho}{A^2} Q_1^2. \quad (56)$$

Lähtökohtina ovat yhtälöt (50) ja (51) kirjoitettuna nyt muotoihin

$$Q_1 = c \sqrt{\frac{p_1 + \bar{p}_2}{\rho}}, \quad (57)$$

$$p_1 - \bar{p}_2 = -\frac{\rho}{A^2} c \sqrt{\frac{p_1 + \bar{p}_2}{\rho}} Q_1 + ph. \quad (58)$$

Näistä tulee eliminoimalla Q_1

$$p_1 - \bar{p}_2 = -\frac{c^2}{A^2} (p_1 + \bar{p}_2) + ph, \quad (59)$$

jonka ratkaisuna saadaan (painehäviölle on tässä ensimmäisessä iteraatiossa käytetty siis arvoa $ph = 0 \text{ Pa}$)

$$p_1 = \frac{(1 - \frac{c^2}{A^2}) \bar{p}_2 + ph}{1 + \frac{c^2}{A^2}} = \frac{\left[1 - 16 \varepsilon'^2 C_d^2 \left(\frac{L}{d} \right)^2 \right] \bar{p}_2 + 0}{1 + 16 \varepsilon'^2 C_d^2 \left(\frac{L}{d} \right)^2} = 16,9 \text{ Pa}. \quad (60)$$

Tilavuusvirran arvo Q_1 saadaan tämän jälkeen kaavasta (57):

$$Q_1 = c \sqrt{\frac{p_1 + \bar{p}_2}{\rho}} = \varepsilon' d L \pi C_d \sqrt{\frac{p_1 + \bar{p}_2}{\rho}} = 0,078 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}. \quad (61)$$

Vastaava virtausnopeus $v_1 = 1,60 \text{ m s}^{-1}$ ja $\text{Re} = 26500$, jolloin kitkatekijä $\lambda = 0,024$ ja kaava (54) antaa $\zeta = 0,79$. Painehäviöksi tulee kaavojen (53) ja (56) mukaisesti arvo

$$ph = phi + \frac{1}{2} \frac{\rho}{A^2} Q_1^2 = 1,20 \text{ Pa} + 1,53 \text{ Pa} = 2,7 \text{ Pa} . \quad (62)$$

Seuraavalla kierroksella aloitetaan siis kaavan (60) sijasta kaavalla

$$p_1 = \frac{(1 - \frac{c^2}{A^2}) \bar{p}_2 + ph}{1 + \frac{c^2}{A^2}} = \frac{\left[1 - 16 \varepsilon'^2 C_d^2 \left(\frac{L}{d} \right)^2 \right] \bar{p}_2 + 2,7 \text{ Pa}}{1 + 16 \varepsilon'^2 C_d^2 \left(\frac{L}{d} \right)^2} = 19,5 \text{ Pa} . \quad (63)$$

Vastaavasti saadaan $Q_1 = 0,081 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$. Seuraavan kierroksen tuloksia ei enää esitetä, koska muutokset jäävät jo vähäisiksi.

Voidaan todeta, että paineilla on suutinkanavan päissä miltei sama arvo, joka on suutinkanavan hyvän toiminnan kannalta ilmeisen tavoiteltava tulos. Lisähuomiona on vielä todettava, että tässä kaavaa (20) sovellettaessa otaksuttiin siis virtauksen aukon läpi johtuvan pelkästään paine-erosta, kun tarkemmin aukon suhteen tapahtuvan poikittaisvirtauksen tiedetään myös vaikuttavan ulosvirtauksen arvoon; [4]. Tämän ilmiön vaikutus on jätetty tässä huomiotta.

Jos käsittely toistetaan esimerkiksi huokoisuustekijän suuremmalla arvolla $\varepsilon' = 0,05$, saadaan ensimmäisenä approksimaationa kaavaa (60) soveltaen ehkä intuitiivon vastainen paineen negatiivinen arvo $p_1 = -7,0 \text{ Pa}$, joka johtaisi siis leikkauksessa 1 ulosvirtauksen sijasta sisäänvirtaukseen. Tämä on esimerkiksi lähteen [2] mukaan tietyissä olosuhteissa käytännössä kuitenkin mahdollista.

Tarkastellaan vielä lyhyesti mekaanisen energian taseen mahdollisesti antamaa versiota tässä sovelluksessa. Yhtälö (13) tulisi seinämävirtauksen yhteydessä aluksi muotoon

$$Q_1 \left[\langle p \rangle_1 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_1^2 + \rho g z_1 \right] - Q_2 \left[\langle p \rangle_2 + \frac{1}{2} \rho \alpha \langle v_x \rangle_2^2 + \rho g z_2 \right] + st = D , \quad (64)$$

jossa st viittaa seinämävirtauksen aiheuttamiin lisätermiin. Näitä on selostettu jonkin verran lausekkeiden (17) yhteydessä. Kun nyt tarkastellaan suutinvirtauksen tapausta, $Q_2 = 0$ ja yhtälöstä (64) jää sievennysten jälkeen muoto (merkintöjä on myös pelkistetty)

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho \alpha v_1^2 + \rho g z_1 + \frac{st}{Q_1} = \frac{D}{Q_1} . \quad (65)$$

Tämän soveltaminen tuntuisi ongelmalliselta etenkin, kun annettu paineen p_2 arvo ei nyt näy suoraan yhtälössä.

Yhteenveto

Kanaviston seinämävirtausta koskevaa aineistoa on vaikea löytää virtausmekaniikan oppikirjoista. Tämän kirjoituksen tarkoituksena on ollut tuoda esille joitakin seinämävirtauksen tavanomaisiin kanavistokaavoihin aiheuttamia muutoksia ja antaa viittauksia lähteisiin, joissa aihetta on käsitelty. Kirjoituksessa on tarkasteltu ilman virtausta, mutta oleelliset kaavat soveltuvat luonnollisesti myös nestemäisen (vakioitiheyksisen) fluidin käsittelyyn.

Kiitos

Kiitämme Jyrki Lönnströmiä suutinkanavia koskevista keskusteluista.

Viitteet

- [1] J. F. Holdsworth, F. W. Pritchard and W. H. Walton (1951). Fluid flow in ducts with a uniformly distributed leakage, *British Journal of Applied Physics*, Vol. 2.
- [2] E. Sandberg ja H. Ripatti (2014). Kanaviston mitoitus, säätö ja mittaus, luku 3 teoksessa Ilmastointilaitoksen mitoitus, s. 87–122.
- [3] E-M. Salonen ja R. Holopainen (2014). Makroskooppiset energiataseet virtauslaskennassa, *Rakenteiden Mekaniikka*, vol. 47, nro 4, s. 127–147.
http://rmseura.tkk.fi/rmlehti/2014/nro4/RakMek_47_4_2014_1.pdf
- [4] I. E. Idelchik (2003). *Handbook of Hydraulic Resistance*, 3rd ed. Jaico.
- [5] R. J. Tsai, H. F. Behls and L. P. Varvak (1998). T-Method Duct Design: Part IV- Leakage Theory, *ASHRAE Transactions*.

Eero-Matti Salonen
Sibeliuksenkatu 3 B 25, 00250 Helsinki, Finland
eeromatti.salonen@gmail.com

Rauno Holopainen
Metropolia Ammattikorkeakoulu
Myllypurontie 1, 00920 Helsinki, Finland
rauno.holopainen@metropolia.fi