

Ortotrooppinen lineaarikimmoinen materiaalimalli

Kari Kolari, Reijo Kouhia¹

Tiivistelmä. Artikkelissa johdetaan lineaarisesti kimmoisan ortotrooppisen materiaalimallin konstitutiivinen yhtälö invarianttiteorian avulla koordinaatistoriippumattomassa muodossa. Ortotrooppinen symmetriaryhmä määritellään kolmen ortogonaalisen yksikkövektorin avulla. Ortotrooppisen aineen invarianttikanta koostuu seitsemästä invariantista, joiden avulla jännitysenergian tai vastaavasti venymäenergian lausekkeet voidaan konstruoida. Materiaaliparametrien termodynaamiset rajoitteet ja kimmokertoimien monotonisuusehdot johdetaan. Esimerkkeinä tarkastellaan balsapuuta, douglaskoivua, sekä reiden ja säären tiivisluun parametreja.

Avainsanat: lineaarikimmoinen materiaalimalli, ortotropia, invariantit, muodonmuutosenergia, jännitysenergia, termodynaamiset rajoitteet, kimmokertoimien monotonisuusehdot

Vastaanotettu 29.9.2023. Hyväksytty 22.12.2023. Julkaistu verkossa 29.12.2023.

Ystäviemme TkT Djebar Baroudin ja TkL Jari Laukkasen muistolle

Johdanto

Materiaalin symmetrialla tarkoitetaan materiaalin tietyn pisteen ominaisuuksien vaihtelua suunnan suhteen [3, sivu 139]. Mikäli ominaisuudet ovat suunnasta riippumattomia kutsutaan materiaalia isotrooppiseksi, muussa tapauksessa anisotrooppiseksi. Lineaarisesti kimmoisalla materiaalilla on kahdeksan mahdollista symmetriaryhmää [2], [3, Luku 4.5], [5], [6, Luku 6], ne ovat trikliininen, monokliininen, kuubinen, ortotrooppinen, trigonaalinen, tetragonaalinen, poikittaisisotrooppinen ja isotrooppinen. Ortotrooppisella materiaalilla on kolme symmetriatasoa, jotka ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Tyypillisiä ortotrooppisia materiaaleja ovat valssatut metallit, puu, paperi ja luu sekä kahteen suuntaan kuituvahvistetut komposiittimateriaalit.

Tässä artikkelissa johdetaan lineaarisesti kimmoisan ortotrooppisen aineen sekä joustomuotoinen, että jäykkyysmuotoinen konstitutiivinen yhtälö yleisessä muodossa käyttäen tensoriarvoisten skalaarifunktioiden invarianttiteoriaa. Mallin parametrit johdetaan myös fysikalisesti mielekkäiden materiaalivakioiden, kuten kimmo- ja liukukertoimien sekä Poissonin vakioiden avulla, mikä lienee artikkelin tärkein uutuusarvo. Lisäksi tarkastellaan termodynaamisia rajoitteita ja kimmokertoimien monotonisuusehtoja, jotka johdetaan kaikissa kolmessa ortotropiatasossa. Spencerin [15] artikkeli on itsenäinen esitys teorian

¹Vastuullinen kirjoittaja. reijo.kouhia@tuni.fi

matemaattiseen perustaan. Sovelluksia esitetään Boehlerin [1] ja Zhangin [18] artikkeleissa. Hyvin tiivis esitys invariattiteoriasta on Truesdellin ja Nollin ensyklopedia-artikkelin luvussa 8, joka on julkaistu vuonna 2004 kirjana [17]. Tämän artikkelin merkinnät perustuvat lähteisiin [12, Luku 4] ja [13, Luku 6]. Invarianttiteorian alkujuurista materiaalmallinnuksesta kiinnostuneille suositellaan lähteitä [14, 16].

Ortotrooppinen lineaarikimmoisen materiaalmalli

Ortotrooppisella aineella on symmetriaominaisuus, joka kuvataan symmetriaryhmän[12]

$$\mathcal{G}_2 = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(V), \mathbf{Q}(\mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1) = \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{m}_1, \\ \mathbf{Q}(\mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2) = \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{m}_2, \mathbf{Q}(\mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3) = \mathbf{m}_3 \otimes \mathbf{m}_3 \}, \quad (1)$$

avulla, jossa $\mathcal{O}(V)$ on kolmidimensioisen euklidisen vektoriavaruuden V ortogonaaliryhmä. Ortotrooppinen ryhmä \mathcal{G}_2 sisältää siten kierrot \mathbf{Q} , jotka säilyttävät kolme ortogonaalista suuntaa \mathbf{m}_i , $i = 1, 2, 3$.

Materiaalia, jolla on olemassa kimmoisen potentiaali, sanotaan Greenin kimmoisaksi tai hyperkimmoisaksi materiaaliksi. Kuten edellisessä artikkelissamme [9] tarkastellaan seuraavassa hyperkimmoisen konstitutiivisen yhteyden muodostamista lähtien komplementaarista venymäenergiatiheydestä

$$W^c = W^c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2) = W^c(\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}_1\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}_2\mathbf{Q}^T), \quad (2)$$

jossa $\mathbf{M}_i = \mathbf{m}_i \otimes \mathbf{m}_i$ on ortotropiatasoon, jonka yksikkönormaali on \mathbf{m}_i , liittyvä rakennetensori (matriisimuodossa $\mathbf{M}_i = [\mathbf{M}_i] = \mathbf{m}_i \mathbf{m}_i^T$) ja \mathbf{Q} on ortotropiiseen symmetriaryhmään \mathcal{G}_2 kuuluva ortogonaalinen tensori. Ortotrooppisen kimmoisan aineen **esityslause**² ilmaisee jännitysenergian riippuvuuden seitsemästä jännitysinvariantista [1, 12, 13]

$$W^c = W^c(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7), \quad (3)$$

jossa jännitysinvariantit I_i ovat

$$I_1 = \text{tr } \boldsymbol{\sigma}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2), \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3), \\ I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1), \quad I_5 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2), \quad I_6 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_1), \quad I_7 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_2). \quad (4)$$

Invariantit I_4 ja I_6 voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1) = \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}_1, \quad I_6 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_1) = \mathbf{m}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{m}_1. \quad (5)$$

Vastaavasti voidaan kirjoittaa myös invarianteille I_5 ja I_7 .

Ortotropiatasojen ortogonaalisuudesta seuraa rakennetensoreiden \mathbf{M}_i välinen yhteys

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 = \mathbf{I}. \quad (6)$$

Tätä yhteyttä voidaan käyttää hyväksi

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3 = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3) = \boldsymbol{\sigma}, \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_1\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}_2\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma} = (\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3)\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}, \quad (8)$$

²Esityslauseet ovat hyvin vahva työkalu konstitutiivisten yhtälöiden muodostamisessa. Niiden todistaminen on kuitenkin varsin hankalaa.

laskemalla puolittain yhteen saadaan

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2\boldsymbol{\sigma}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma}), \quad (9)$$

ja

$$\text{tr } \boldsymbol{\sigma} = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3). \quad (10)$$

Aivan vastaavalla tavalla päädytään tulokseen

$$\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2) = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_1) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_2) + \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_3). \quad (11)$$

Täten invarianttikannalle (4) vaihtoehtoinen esitys on

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1), & I_2 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2), & I_3 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3), \\ I_4 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_1), & I_5 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_2), & I_6 &= \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}_3), & I_7 &= \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3), \end{aligned} \quad (12)$$

jossa kaikki kolme rakennetensoria esiintyvät.

Yleisin mahdollinen kimmoinen ortotrooppinen konstitutiivinen yhtälö saadaan derivoimalla invarianttikannan (12) avulla lausuttu jännitysenergia (3) jännityksen suhteen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\partial W^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \sum_{i=1}^7 \frac{\partial W^c}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ &= \frac{\partial W^c}{\partial I_1} \mathbf{M}_1 + \frac{\partial W^c}{\partial I_2} \mathbf{M}_2 + \frac{\partial W^c}{\partial I_3} \mathbf{M}_3 + \frac{\partial W^c}{\partial I_4} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\boldsymbol{\sigma}) \\ &\quad + \frac{\partial W^c}{\partial I_5} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\partial W^c}{\partial I_6} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3\boldsymbol{\sigma}) + \frac{\partial W^c}{\partial I_7} \boldsymbol{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Rajoituttaessa lineaarisen malliin, on derivaattojen $\partial W^c/\partial I_i$ toteutettava

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_1} = b_1 I_1 + c_1 I_2 + c_2 I_3, \quad (14)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_2} = b_2 I_1 + b_3 I_2 + c_3 I_3, \quad (15)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_3} = b_4 I_1 + b_5 I_2 + b_6 I_3, \quad (16)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_4} = b_7, \quad (17)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_5} = b_8, \quad (18)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_6} = b_9, \quad (19)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_7} = 0. \quad (20)$$

koska kaikkien termien on yhtälössä (13) oltava jännityksen $\boldsymbol{\sigma}$ suhteen lineaarisia. Identiteetistä

$$\frac{\partial^2 W^c}{\partial I_i \partial I_j} = \frac{\partial^2 W^c}{\partial I_j \partial I_i}, \quad (21)$$

saadaan

$$\frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_1} \right) = \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_2} \right) \quad \Rightarrow \quad c_1 = b_2, \quad (22)$$

$$\frac{\partial}{\partial I_3} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_1} \right) = \frac{\partial}{\partial I_1} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_3} \right) \quad \Rightarrow \quad c_2 = b_4, \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial I_3} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_2} \right) = \frac{\partial}{\partial I_2} \left(\frac{\partial W^c}{\partial I_3} \right) \quad \Rightarrow \quad c_3 = b_5. \quad (24)$$

Lineaarikimmoisalla ortotrooppisella materiaalilla on siten yhdeksän materiaaliparametria ja sen konstitutiivinen yhtälö voidaan kirjoittaa yleisessä koordinaatistosta riippumattomassa muodossa

$$\begin{aligned} \varepsilon = & [b_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_1 \\ & + [b_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_2 \\ & + [b_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_6 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_3 \\ & + b_7(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\sigma}) + b_8(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\sigma}) + b_9(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (25)$$

Epälineaarisesti kimmoisan ortotrooppisen aineen hyperelastisia malleja on esitetty mm. lähteessä [7].

Materiaaliparametrit

Johdetaan seuraavaksi materiaaliparametrien b_1, \dots, b_9 lausekkeet ilmaistuna fysikaalisesti mielekkäiden kimmovakioiden avulla [10]. Tätä varten tarkastellaan erikoistapausta, jossa ortotropiatasojen normaalin suunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntiin. Fysikaalisesti järkevät materiaaliparametrit ovat kimmokertoimet E_1, E_2 ja E_3 koordinaattiakselien suunnissa, leikkauskertoimet G_{12}, G_{23} ja G_{13} sekä Poissonin vakiot ν_{12}, ν_{23} ja ν_{13} . Voigtin merkintätavassa jännitys- ja venymätensorit kirjoitetaan vektoreina ja käytetään seuraavaa järjestystä jännitys- ja venymäkomponenteille

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}]^T \quad \text{ja} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}]^T. \quad (26)$$

Superpositioperaatteen nojalla on helppo päätyä komplianssimatriisiin

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Komplianssimatriisin \mathbf{D} symmetrian nojalla seuraavien ehtojen on oltava voimassa

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3}, \quad (28)$$

tai kirjoitettuna helpommin muistettavassa muodossa

$$\nu_{ij} E_j = \nu_{ji} E_i. \quad (29)$$

Yleisen muodon (25) erikoistapauksessa, jossa $\mathbf{m}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{m}_2 = (0, 1, 0)^T$ ja $\mathbf{m}_3 = (0, 0, 1)^T$, saadaan rakennetensoreille matriisiesitykset

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

ja

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1] + [\mathbf{M}_1 \boldsymbol{\sigma}] &= \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, & [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2] + [\mathbf{M}_2 \boldsymbol{\sigma}] &= \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 2\sigma_{22} & \tau_{23} \\ 0 & \tau_{23} & 0 \end{pmatrix}, \\ [\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3] + [\mathbf{M}_3 \boldsymbol{\sigma}] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 2\sigma_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

Invarianteilla I_1, \dots, I_3 on nyt lausekkeet

$$I_1 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) = \sigma_{11}, \quad I_2 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) = \sigma_{22}, \quad I_3 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3) = \sigma_{33}. \quad (32)$$

Täten konstitutiivinen yhtälö (25) auki kirjoitettuna on muotoa

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} &= \\ & [b_1\sigma_{11} + b_2\sigma_{22} + b_4\sigma_{33}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + [b_2\sigma_{11} + b_3\sigma_{22} + b_5\sigma_{33}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + [b_4\sigma_{11} + b_5\sigma_{22} + b_6\sigma_{33}] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b_7 \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ & + b_8 \begin{pmatrix} 0 & \tau_{12} & 0 \\ \tau_{12} & 2\sigma_{22} & \tau_{23} \\ 0 & \tau_{23} & 0 \end{pmatrix} + b_9 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \tau_{13} \\ 0 & 0 & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & 2\sigma_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (33)$$

Kootaan tulokset yhteen ja otetaan huomioon että Voigtin merkintätavassa leikkausmuodonmuutokset esitetään liukukulman $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$ avulla, saadaan viimein joustomuotoinen konstitutiivinen yhtälö

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (34)$$

jossa materiaalin komplianssi- eli joustomatriisi on

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} b_1 + 2b_7 & b_2 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 + 2b_8 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_4 & b_5 & b_6 + 2b_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(b_8 + b_9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(b_7 + b_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(b_7 + b_8) \end{pmatrix} \quad (35)$$

Materiaaliparametrit b_i yhtälössä (25) voidaan ratkaista yhtälöistä (35) ja (27), ja tuloksena on

$$b_1 = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{2G_{23}} - \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{13}}, \quad (36)$$

$$b_3 = \frac{1}{E_2} + \frac{1}{2G_{13}} - \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{23}}, \quad (37)$$

$$b_6 = \frac{1}{E_3} + \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{23}} - \frac{1}{2G_{13}}, \quad (38)$$

$$b_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad (39)$$

$$b_4 = -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \quad (40)$$

$$b_5 = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad (41)$$

$$b_7 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}} \right), \quad (42)$$

$$b_8 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right), \quad (43)$$

$$b_9 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{23}} + \frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{12}} \right). \quad (44)$$

Termodynaamiset rajoitteet

Jotta venymä- tai jännitysenergia olisi positiivinen kaikilla venymien arvoilla, on materiaalin kimmoisen komplianssimatriisin, ja siten myös materiaalin kimmoisen jäykkyysmatriisin oltava positiivisesti definiitti. Välttämätön ja riittävä ehto matriisin positiividefiniittiydelle on, että kaikki sen pääalideterminantit ovat positiivisia. Täten kaikkien kimmo- ja leikkauskertoimien on oltava positiivisia

$$E_1 > 0, \quad E_2 > 0, \quad E_3 > 0, \quad G_{12} > 0, \quad G_{23} > 0, \quad \text{ja} \quad G_{13} > 0. \quad (45)$$

kuten myös seuraavien alideterminanttien

$$\begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 \end{vmatrix} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2} > 0, \quad (46)$$

$$\begin{vmatrix} 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 \\ -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 \end{vmatrix} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3} > 0, \quad (47)$$

$$\begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{31}/E_3 \\ -\nu_{13}/E_1 & 1/E_3 \end{vmatrix} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3} > 0, \quad (48)$$

ja

$$\begin{vmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 \end{vmatrix} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} > 0. \quad (49)$$

Koska kimmokertoimet ovat positiivisia, epäyhtälöt (46)-(48) voidaan esittää muodossa

$$1 - \nu_{ij}\nu_{ji} > 0, \quad (50)$$

ja ottaen huomioon resiprookkiyhtälöt (29) muuntuu ehto muotoon

$$1 - \nu_{ij}^2 E_j / E_i > 0, \quad \text{tai} \quad |\nu_{ij}| < \sqrt{E_i / E_j}. \quad (51)$$

Täten komplianssimatriisi on positiivisesti definiitti mikäli epäyhtälöt (45) ja (51) sekä seuraava Poissonin lukuja sitova ehto on voimassa

$$\Delta \equiv 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}\nu_{13} > 0. \quad (52)$$

Monotonisuusehdot

Termodynaamiset rajoitteet ovat välttämättömiä. Jos oletaan, että pääsuunnat edustavat materiaalin jäykkyyden tai kimmoisuuden ääriarvoja, on siitä seurauksena lisäehtoja materiaaliparametrien välillä. Tarkastellaan kimmokertoimen muuttumista kolmessa tasossa. Ensimmäisenä tarkastellaan yksiakselistaa jännitystilaa x_1 - x_2 tasossa, tällöin jännitystensori on

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma \mathbf{n}_{12} \otimes \mathbf{n}_{12}, \quad \text{jossa} \quad \mathbf{n}_{12} = (\cos \psi_{12}, \sin \psi_{12}, 0)^T. \quad (53)$$

Käytetään lyhennysmerkintöjä $c_{12} = \cos \psi_{12}$ ja $s_{12} = \sin \psi_{12}$, jolloin venymän lauseke (25) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} = & [(b_1 c_{12}^2 + b_2 s_{12}^2) \mathbf{M}_1 + (b_2 c_{12}^2 + b_3 s_{12}^2) \mathbf{M}_2 + (b_4 c_{12}^2 + b_5 s_{12}^2) \mathbf{M}_3 + \\ & + b_7 (\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{m}_1) (\mathbf{n}_{12} \otimes \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_1 \otimes \mathbf{n}_{12}) + b_8 (\mathbf{n}_{12} \cdot \mathbf{m}_2) (\mathbf{n}_{12} \otimes \mathbf{m}_2 + \mathbf{m}_2 \otimes \mathbf{n}_{12})] \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned} \quad (54)$$

Venymätensorin nolasta eroavat komponentit ovat siten ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} ja ε_{33} , ja niille saadaan lausekkeet

$$\varepsilon_{11} = [(b_1 + 2b_7) c_{12}^2 + b_2 s_{12}^2] \sigma, \quad (55)$$

$$\varepsilon_{22} = [(b_3 + 2b_8) s_{12}^2 + b_2 c_{12}^2] \sigma, \quad (56)$$

$$\varepsilon_{12} = (b_7 + b_8) s_{12} c_{12} \sigma, \quad (57)$$

$$\varepsilon_{33} = (b_4 c_{12}^2 + b_5 s_{12}^2) \sigma. \quad (58)$$

Havaitaan, että jännitys ja venymätensori eivät ole koaksiaalisia, eli niillä on eriävät pääsuunnat. Tämä on anisotrooppisille aineille ominaista. Venymä vektorin \mathbf{n}_{12} suunnassa on

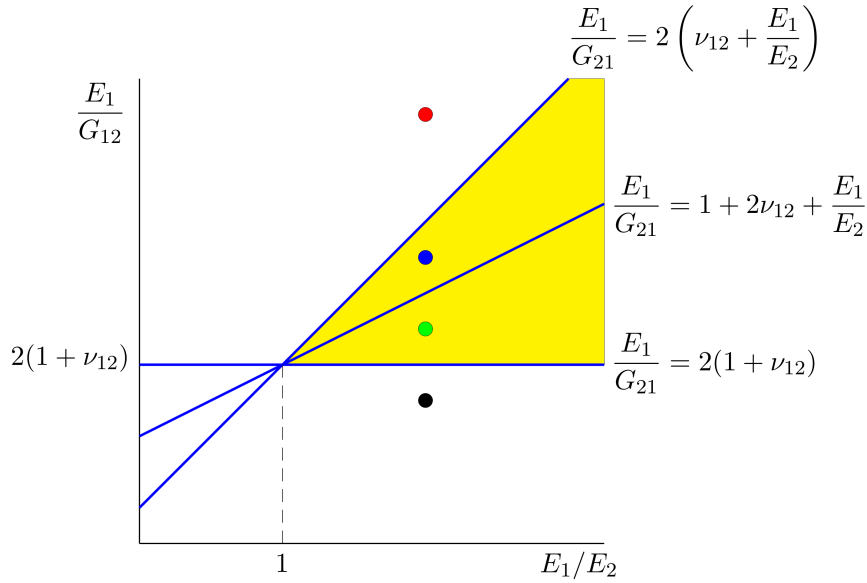
$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{n}_{12}) = \mathbf{n}_{12} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{n}_{12} = c_{12}^2 \varepsilon_{11} + 2s_{12} c_{12} \varepsilon_{12} + s_{12}^2 \varepsilon_{22}, \quad (59)$$

ja kimmokertoimen lausekkeeksi suunnassa \mathbf{n}_{12} saadaan

$$E(\mathbf{n}_{12}) = \frac{E_1}{\left(1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}\right) c_{12}^4 + 2 \left(\frac{E_1}{2G_{12}} - \frac{E_1}{E_2} - \nu_{12}\right) c_{12}^2 + \frac{E_1}{E_2}}. \quad (60)$$

Merkitään $x = c_{12}^2$ ja tutkitaan nimittäjän

$$f(x) = \left(1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}\right) x^2 + 2 \left(\frac{E_1}{2G_{12}} - \frac{E_1}{E_2} - \nu_{12}\right) x + \frac{E_1}{E_2} \quad (61)$$



Kuva 1. Monotonisuusehtojen (65) rajaama alue on väritetty keltaisella. Pistekohtia vastaavat kimmokerrointen suuntariippuvuudet on esitetty kuvassa 2. Aluetta rajaavien suorien yhtälöt on esimerkinomaisesti kirjoitettu 1-2 tasossa.

monotonisuutta. Funktio f on monotoninen välillä $x \in [0, 1]$ mikäli sen derivaatalla x :n suhteen ei ole nollakohtaa tuolla välillä. Tämä ehto toteutuu mikäli

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{2G_{12}}}{1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}} > 1, \quad \text{tai} \quad \frac{\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{2G_{12}}}{1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} - \frac{E_1}{G_{12}}} < 0. \quad (62)$$

Tarkastellaan ensin ensimmäistä epäyhtälöä, joka johtaa rajoitteeseen

$$\frac{E_1}{G_{12}} > 2(1 + \nu_{12}), \quad (63)$$

mikäli lausekkeen (62) nimittäjä on positiivinen, eli

$$\frac{E_1}{G_{12}} < 1 + 2\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} \quad \text{tai} \quad \frac{E_1}{E_2} > \frac{E_1}{G_{12}} - 1 - 2\nu_{12}. \quad (64)$$

Mikäli nimittäjä on negatiivinen kääntyy epäyhtälöiden (63) ja (64) suunta.

Jälkimmäinen ehdoista voi toteutua vain jos osoittaja ja nimittäjä ovat erimerkkisiä. Täten monotonisuusehto rajautuu alueeseen joka määräytyy epäyhtälöiden

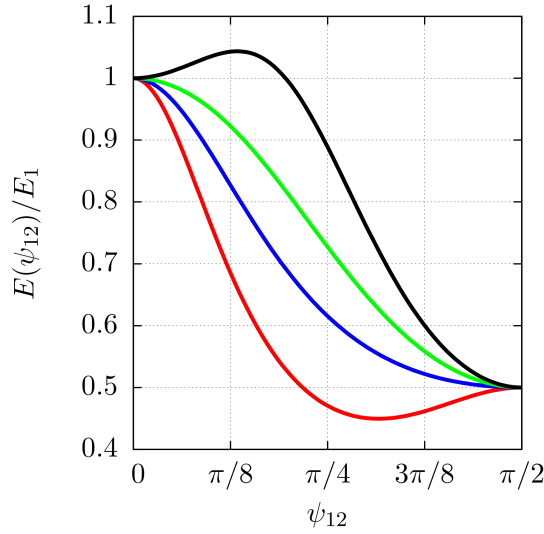
$$\frac{E_1}{G_{12}} > 2(1 + \nu_{12}) \quad \text{ja} \quad \frac{E_1}{G_{12}} < 2 \left(\nu_{12} + \frac{E_1}{E_2} \right) \quad (65)$$

määrittämään sektoriin, jota on havainnollistettu kuvassa 1.

Aivan vastaavalla tavalla voidaan käsitellä x_2, x_3 - sekä x_3, x_1 -tasot. Tuloksena saadaan rajoitteet

$$\frac{E_2}{G_{23}} > 2(1 + \nu_{23}) \quad \text{ja} \quad \frac{E_2}{G_{23}} < 2 \left(\nu_{23} + \frac{E_2}{E_3} \right), \quad (66)$$

$$\frac{E_3}{G_{13}} > 2(1 + \nu_{13}) \quad \text{ja} \quad \frac{E_1}{G_{13}} < 2 \left(\nu_{13} + \frac{E_1}{E_3} \right). \quad (67)$$



Kuva 2. Kimmokertoimen riippuvuus suunnasta $\mathbf{n}_{12}(\psi_{12})$ kun $E_1/E_2 = 2$ ja $\nu_{12} = 0,25$. Alhaalta ylöspäin käyrät vastaavat kohtia $E_1/G_{12} = 6, 4, 3$, ja 2 .

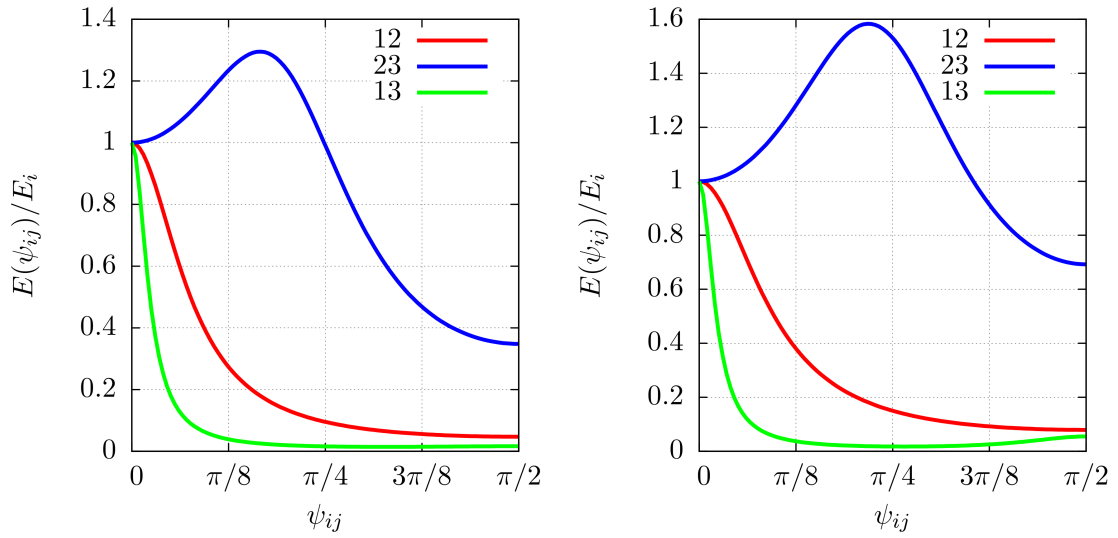
Taulukko 1. Balsapuun ja douglaskuusen kimmovakiot [8, Taulukko 52, sivu 165].

puulaji	E_1 MPa	E_2 MPa	E_3 MPa	ν_{23} -	ν_{13} -	ν_{12} -	G_{23} MPa	G_{13} MPa	G_{12} MPa
balsapuu	6274	296	103	0,66	0,49	0,23	200	33	310
douglaskuusi	16400	1300	900	0,62	0,37	0,43	910	79	1180

Kuvassa 2 on havainnollistettu kimmokertoimen muuttumista suunnassa $\mathbf{n}_{12}(\psi_{12})$ neljässä kuvan 1 pisteessä jossa $E_1/E_2 = 2$ ja $\nu_{12} = 0,25$, mutta suhde E_1/G_{12} vaihtelee: $E_1/G_{12} = 6$ sekä osoittaja g_1 että nimittäjä g_2 negatiivisia, $E_1/G_{12} = 4$ jolloin osoittaja ja nimittäjä ovat erimerkkisiä, $E_1/G_{12} = 3$ sekä osoittaja että nimittäjä positiivisia ja epäyhtälö (63) toteutuu, $E_1/G_{12} = 2$ jolloin sekä nimittäjä että osoittaja positiivisia, mutta ehto (63) ei toteudu.

Taulukossa 1 on esitetty balsapuun ja douglaskoivun kimmovakioita [8, Taulukko 52, sivu 165]. Näytteiden kosteuspiitoisuus on ollut 9%. Kuvassa 3 on esitetty kimmokertoimen suuntariippuvuus tasoissa 1-2, 2-3 ja 1-3. Suunta 1 on aksiaalisuunta, eli puun kasvusuunta, 2 on säteen suunta ja 3 tangentialisuunta. Havaitaan, että vain tasossa 1-2 monotonisuusehdot toteutuvat. Tasossa 2-3 rikotaan ehtoa $E_2/G_{23} > 2(1 + \nu_{23})$, eli balsapuun lukuarvoilla $1,48 \not> 3,32$, tämä vastaa monotonisuusehtoja havainnollistavassa kuvassa 1 alinta mustaa pistettä. Vastaavasti tasossa 1-3 rikotaan ehtoa $E_1/G_{13} < 2(\nu_{13} + E_1/E_3)$, joka balsapuun lukuarvoilla antaa $207,6 \not< 37,2$ ja jota vastaa punaista pistettä kuvassa 1. Monotonisuusehtojen rikkominen voi johtua mittausvirheistä leikkauskertoimien G_{23} ja G_{13} määrittämisessä.

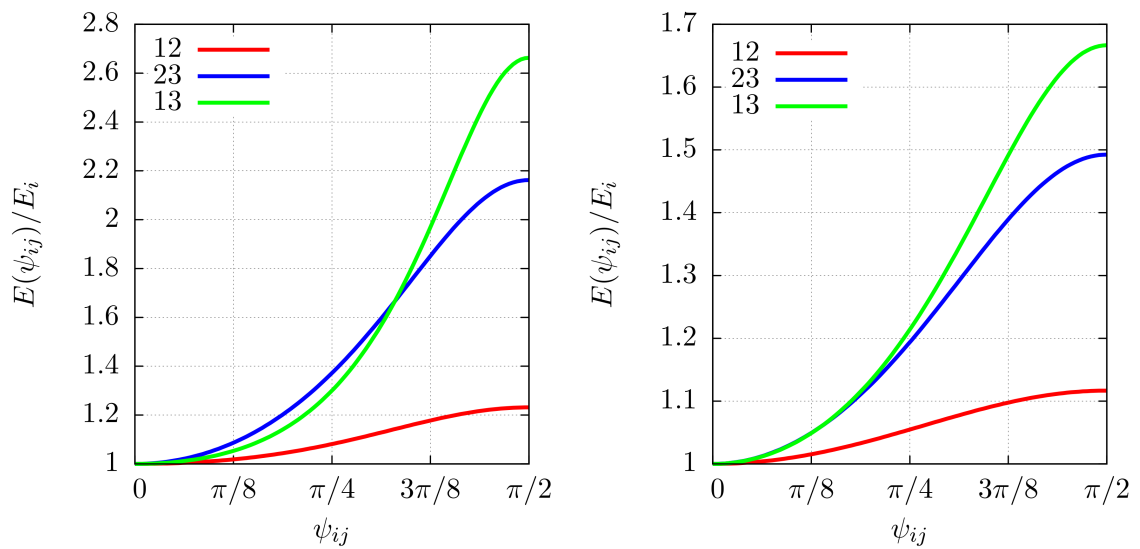
Taulukossa 2 on esitetty ihmisen säären ja reiden kuivan tiivisluun kimmovakioita [4, Taulukko 11.2, sivu 357]. Suunta 3 on luun pituussuunta, 1 on säteen suunta ja 2 tangentialinen suunta. Kimmokertoimen suuntariippuvuutta on havainnollistettu kuvassa 4, josta havaitaan, että monotonisuusehdot toteutuvat kaikissa tasoissa.



Kuva 3. Kimmokertoimen riippuvuus suunnasta $\mathbf{n}_{ij}(\psi_{ij})$ Balsapuulle (vasemmalla) ja männylle (oikealla).

Taulukko 2. Ihmisen säären ja reiden kuivan tiivisluun kimmovakioita [4, Taulukko 11.2, sivu 357].

luu	. mittaustapa	E_1 MPa	E_2 MPa	E_3 MPa	ν_{23} -	ν_{13} -	ν_{12} -	G_{23} MPa	G_{13} MPa	G_{12} MPa
sääri	mekaaninen	6910	8510	18400	0,14	0,12	0,49	4910	3560	2410
reisi	ultraääni	12000	13400	20000	0,235	0,222	0,376	6230	5610	4530



Kuva 4. Kimmokertoimen riippuvuus suunnasta $\mathbf{n}_{ij}(\psi_{ij})$ sääri- (vasemmalla) ja reisiluulle (oikealla).

Jäykkyyssuotoinen konstitutiivinen yhtälö

Aivan vastaavasti kuin joustomuotoinen yhtälö (25) voidaan venymäenergiasta lähtien johtaa jäykkyyssuotoinen konstitutiivinen yhtälö

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = & [a_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_1 \\ & + [a_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_2 \\ & + [a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_6 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_3 \\ & + a_7(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\varepsilon}) + a_8(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\varepsilon}) + a_9(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\varepsilon}),\end{aligned}\quad (68)$$

joka Voigtin esitystavalla voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (69)$$

jossa materiaalin jäykkyyssuotoinen matriisi \mathbf{C} on

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 + 2a_7 & a_2 & a_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 + 2a_8 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & a_5 & a_6 + 2a_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_8 + a_9) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_7 + a_9) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_7 + a_8) \end{pmatrix}, \quad (70)$$

jossa jännitys ja venymäkomponenttien järjestys on kuten kaavoissa (26). Parametrit a_7 , a_8 ja a_9 voidaan helposti lausua leikkauskertoimien avulla

$$a_7 = G_{13} + G_{12} - G_{23}, \quad a_8 = G_{12} + G_{23} - G_{13}, \quad a_9 = G_{13} + G_{23} - G_{12}. \quad (71)$$

Tarkastellaan seuraavaksi yksiakselista normaalijännitystilaa x_1 akselin suunnassa, jolloin $\varepsilon_{22} = -\nu_{12}\varepsilon_{11}$ ja $\varepsilon_{33} = -\nu_{13}\varepsilon_{11}$. Merkitään normaalijännityksiin liittyviä diagonaalitermejä $C_{11} = a_1 + 2a_7$, $C_{22} = a_3 + 2a_8$ ja $C_{33} = a_6 + 2a_9$, saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (C_{11} - \nu_{12}a_2 - \nu_{13}a_4)\varepsilon_{11} = E_1\varepsilon_{11}, \\ \sigma_{22} &= (a_2 - \nu_{12}C_{22} - \nu_{13}a_5)\varepsilon_{11} = 0, \\ \sigma_{33} &= (a_4 - \nu_{12}a_5 - \nu_{13}C_{33})\varepsilon_{11} = 0.\end{aligned}\quad (72)$$

Tarvitaan vielä kolme yhtälöä. Kaksi saadaan yksiakselisesta jännitystilasta, jossa $\sigma_{22} \neq 0$, tällöin $\varepsilon_{11} = -\nu_{21}\varepsilon_{22}$ ja $\varepsilon_{33} = -\nu_{23}\varepsilon_{22}$.

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (-\nu_{21}C_{11} + a_2 - \nu_{23}a_4)\varepsilon_{22} = 0, \\ \sigma_{22} &= (-\nu_{21}a_2 + C_{22} - \nu_{23}a_5)\varepsilon_{22} = E_2\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{33} &= (-\nu_{21}a_4 + a_5 - \nu_{23}C_{33})\varepsilon_{22} = 0.\end{aligned}\quad (73)$$

Mikäli σ_{33} on ainoa nollasta eroava jännityskomponentti, $\varepsilon_{11} = -\nu_{31}\varepsilon_{33}$, $\varepsilon_{22} = -\nu_{32}\varepsilon_{33}$, vastaavat yhtälöt ovat

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= (-\nu_{31}C_{11} - \nu_{32}a_2 + a_4)\varepsilon_{33} = 0, \\ \sigma_{22} &= (-\nu_{31}a_2 - \nu_{32}C_{22} + a_5)\varepsilon_{33} = 0, \\ \sigma_{33} &= (-\nu_{31}a_4 - \nu_{32}a_5 + C_{33})\varepsilon_{33} = E_3\varepsilon_{33}.\end{aligned}\quad (74)$$

Ratkaisuksi saadaan

$$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} E_1, \quad (75)$$

$$C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} E_2, \quad (76)$$

$$C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} E_3, \quad (77)$$

$$a_2 = \frac{\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}}{\Delta} E_1 = \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta} E_2, \quad (78)$$

$$a_4 = \frac{\nu_{31} + \nu_{32}\nu_{21}}{\Delta} E_1 = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} E_3, \quad (79)$$

$$a_5 = \frac{\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12}}{\Delta} E_2 = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} E_3, \quad (80)$$

jossa Δ on määritelty lausekkeella (52). Vakiot a_1, a_3 ja a_6 ovat

$$a_1 = C_{11} - 2a_7 = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} E_1 + 2(G_{23} - G_{13} - G_{12}), \quad (81)$$

$$a_3 = C_{22} - 2a_8 = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} E_2 + 2(G_{13} - G_{12} - G_{23}), \quad (82)$$

$$a_6 = C_{33} - 2a_9 = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} E_3 + 2(G_{12} - G_{23} - G_{13}). \quad (83)$$

Ortotrooppisen lineaarisesti kimmoisan aineen jäykkyysmatriisi erikoistapauksessa, jossa materiaalin pääsuunnat yhtyvät koordinaattiakselien suuntaan, on siten muotoa

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} (1 - \nu_{23}\nu_{32})E_1/\Delta & (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32})E_2/\Delta & (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})E_3/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - \nu_{13}\nu_{31})E_2/\Delta & (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})E_3/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & & (1 - \nu_{12}\nu_{21})E_3/\Delta & 0 & 0 & 0 \\ & & & G_{23} & 0 & 0 \\ & & & & G_{13} & 0 \\ \text{symm.} & & & & & G_{12} \end{pmatrix}. \quad (84)$$

Materiaalin jäykkyystensori

Lineaarinen yhtälö (68) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (85)$$

jossa jäykkyystensori C_{ijkl} on

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & a_1 M_{(1)ij} M_{(1)kl} + a_2 (M_{(1)ij} M_{(2)kl} + M_{(2)ij} M_{(1)kl}) + a_3 M_{(2)ij} M_{(2)kl} + \\ & + a_4 (M_{(1)ij} M_{(3)kl} + M_{(3)ij} M_{(1)kl}) + a_5 (M_{(2)ij} M_{(3)kl} + M_{(3)ij} M_{(2)kl}) + a_6 M_{(2)ij} M_{(3)kl} + \\ & + a_7 (\delta_{ik} M_{(1)lj} + M_{(1)ik} \delta_{lj}) + a_8 (\delta_{ik} M_{(2)lj} + M_{(2)ik} \delta_{lj}) + a_9 (\delta_{ik} M_{(2)lj} + M_{(3)ik} \delta_{lj}). \end{aligned} \quad (86)$$

Vastaavanlainen muoto voidaan johtaa myös joustotensorille D_{ijkl} .

Yhteenveto

Tässä artikkelissa on johdettu lineaarisesti kimmoisan ortotrooppisen aineen joustomuotoinen ja jäykkyysmuotoinen konstitutiivinen yhtälö. Johto tehtiin invarianttiteorian avulla yleisessä koordinaatistosta riippumattomassa muodossa, yhtälöt (25) ja (68). Yhtälöissä tarvittavat yhdeksän toisistaan riippumatonta materiaalivakiota johdettiin fysikaalisesti mielekkäiden suureiden, kolmen materiaalin pääsuunnan kimmokertoimen, kolmen liuku-kertoimen ja kolmen Poissonin vakion avulla. Joustomuotoinen konstitutiivinen yhtälö on

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} = & [b_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_1 \\ & + [b_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_2 \\ & + [b_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1) + b_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2) + b_6 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_3 \\ & + b_7(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\sigma}) + b_8(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\sigma}) + b_9(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\sigma}).\end{aligned}\quad (25)$$

jossa materiaalivakiot b_1, \dots, b_9 ovat

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{1}{E_1} + \frac{1}{2G_{23}} - \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{13}}, \\ b_3 &= \frac{1}{E_2} + \frac{1}{2G_{13}} - \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{23}}, \\ b_6 &= \frac{1}{E_3} + \frac{1}{2G_{12}} - \frac{1}{2G_{23}} - \frac{1}{2G_{13}}, \\ b_2 &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ b_4 &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, \\ b_5 &= -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ b_7 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{23}} \right), \\ b_8 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{G_{23}} - \frac{1}{G_{13}} \right), \\ b_9 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{G_{23}} + \frac{1}{G_{13}} - \frac{1}{G_{12}} \right).\end{aligned}$$

Vastaavasti jäykkyysmuotoinen konstitutiivinen yhtälö on

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} = & [a_1 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_1 \\ & + [a_2 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_2 \\ & + [a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1) + a_5 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2) + a_6 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3)] \mathbf{M}_3 \\ & + a_7(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\varepsilon}) + a_8(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_2 \boldsymbol{\varepsilon}) + a_9(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_3 \boldsymbol{\varepsilon}),\end{aligned}\quad (68)$$

jossa materiaalivakiot a_1, \dots, a_9 ovat

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta} E_1 + 2(G_{23} - G_{13} - G_{12}), \\
 a_3 &= \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} E_2 + 2(G_{13} - G_{12} - G_{23}), \\
 a_6 &= \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} E_3 + 2(G_{12} - G_{23} - G_{13}), \\
 a_2 &= \frac{\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}}{\Delta} E_2, \\
 a_4 &= \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta} E_3, \\
 a_5 &= \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta} E_3, \\
 a_7 &= G_{13} + G_{12} - G_{23}, \\
 a_8 &= G_{12} + G_{23} - G_{13}, \\
 a_9 &= G_{13} + G_{23} - G_{12},
 \end{aligned}$$

jossa

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} - \nu_{32}\nu_{21}\nu_{13}. \quad (52)$$

Viitteet

- [1] J.P. Boehler, toimittaja. *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, Nro 292, Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics. Springer-Verlag, 1987.
- [2] P. Chadwick, M. Vianello, S.C. Cowin. A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11): 2471–2492, 2001. doi:[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00064-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00064-3). The Jean-Paul Boehler Memorial Volume.
- [3] S.C. Cowin. *Continuum Mechanics of Anisotropic Materials*. Springer, 2013.
- [4] S.C. Cowin, S.B. Doty. *Tissue Mechanics*. Springer, 2007.
- [5] S. Forte and M. Vianello. Symmetry classes for elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 43(2):81–108, 1996. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00042505>.
- [6] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. With Applications to Continuum Mechanics*. Springer, 4th edition, 2015.
- [7] M. Itskov, N. Aksel. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14):3833–3848, 2004. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.027>.
- [8] P.O. Kettunen. *Wood – Structure and Properties*, vol. 29–30 sarjassa *Materials Science Foundations*. Trans Tech Publications Ltd, 2006.
- [9] K. Kolari, R. Kouhia. Poikittaisisotrooppinen lineaarikimmoinen materiaalimalli. *Rakenteiden Mekaniikka*, 55(1):14–25, 2022. doi:<https://doi.org/10.23998/rm.115625>.

- [10] R. Kouhia. Introduction to materials modelling. Lecture notes. Versio 22.10.2023. https://webpages.tuni.fi/rakmek/personnel/kouhia/papers/lecture_notes/mat_mod_lecture_notes.pdf
- [11] I-Shih Liu. On representations of anisotropic invariants. *International Journal of Engineering Science*, 20(10):1099–1109, 1982. doi:[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90092-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90092-1).
- [12] I-Shih Liu. *Continuum Mechanics*. Springer, 2002.
- [13] N.S. Ottosen, M. Ristinmaa. *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier, 2005.
- [14] G.F. Smith, M.M. Smith, R.S. Rivlin. Integrity bases for a symmetric tensor and a vector – The crystal classes. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 12: 93–133, 1963. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00281221>.
- [15] A.J.M. Spencer. Theory of invariants. In C. Eringen, editor, *Continuum Physics*, volume 1 – Mathematics. Academic Press, 1971. Part III.
- [16] A.J.M. Spencer, R.S. Rivlin. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 9:45–63, 1962. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
- [17] C. Truesdell and W. Noll. *The Non-linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 3. edition, 2004.
- [18] J.M. Zhang. On anisotropic invariants of vectors and second order tensors. *Archives of Mechanics*, 43(2-3):215–238, 1991.

Kari Kolari
 VTT Technical Research Centre of Finland
 PL 100, 02044 VTT Espoo
 kari.kolari@vtt.fi

Reijo Kouhia
 Rakenteiden mekaniikka, Rakennustekniikka, Tampereen yliopisto
 PL 600, 33014 Tampereen yliopisto (Hervannan kampus)
 reijo.kouhia@tuni.fi