

Lapetaivutetun CLT-rakenteen lujuuslaskenta- menetelmät

Sami Pajunen¹, Essi Lääveri ja Markku Heinisuo

Tiivistelmä Ristiinliimatuista lautakerroksista koottu monikerroslevy, niin sanottu CLT-levy (Cross-Laminated Timber), on vakiinnuttanut paikkansa muiden insinööripuutuotteiden rinnalla teollisessa puurakentamisessa. CLT-levyä käytetään asuinkerrostaloissa, toimistoissa ja muissa julkisissa rakennuksissa etenkin seinien ja lattioiden kantavina rakenteina sekä osana koko rakennuksen jäykistysjärjestelmää. Lujuustekniseltä kannalta CLT-levyn tyypillisistä käyttökohteista ylivoimaisesti haastavimpia ovat lattiarakenteet, joissa levyn kerroksellisuus yhdistettynä puun ortotrooppisuuteen tekee rakenteen siirtymien ja jännitysten laskennasta monimutkaista. Tässä artikkelissa käydään läpi tällaisten lapetaivutettujen CLT-rakenteiden yleisimpien analyysimenetelmien teoreettisia perusteita sekä vertaillaan menetelmien etuja sekä niiden käyttöön vaikuttavia ominaisuuksia.

Avainsanat: CLT, kerrospalkkiteoria, Gamma-menetelmä, laajennettu Gamma-menetelmä, leikkausanalogia, liittovaikutus

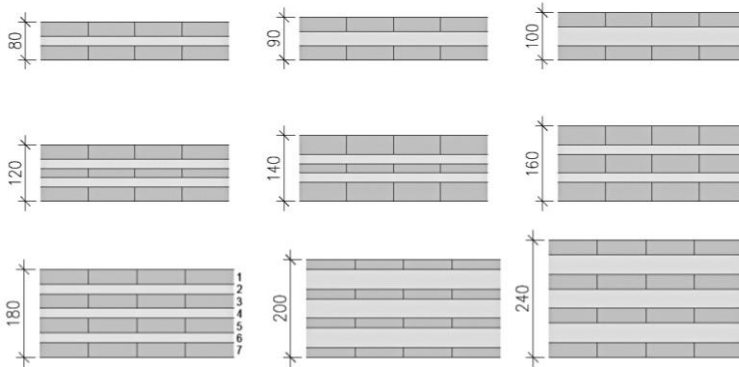
Vastaanotettu: 30.3.2023. *Hyväksytty:* 7.7.2023. *Julkaistu verkossa:* 4.9.2023.

Johdanto

Teolliseen rakentamiseen tarkoitettut insinööripuutuotteet kuten liimapuu, vaneri, viilupuupuu, tai CLT-levy perustuvat kaikki tavalla tai toisella puun materiaaliominaisuuksien homogenisointiin erillisiä puukerroksia yhteen liimaamalla. Tällä tavalla puumateriaalissa luontaisesti esiintyvät yksittäiset viat sekä lujuusominaisuuksien vaihtelut saadaan tasoitettua ja puutuotteen ominaisuuksia parannettua. CLT-levy valmistetaan liimaamalla päällekkäisiä lautakerroksia toisiinsa siten, että vierekkäisten kerrosten syysuunnat ovat kohtisuorassa toisiaan vasten ja kerroksia on pariton määrä, yleensä kolme, viisi, tai seitsemän. Lautakerrokset liimataan toisiinsa lautojen lappeista, mutta samassa kerroksessa olevien lautojen kiinnittäminen toisiinsa syrjistään liimaamalla on valmistajakohtaista. Kuvassa 1 on esitetty muutamia tyypillisiä CLT-levyjä, jotka toistuvat eri valmistajien tarjonnassa. Lähes poikkeuksetta teollisessa rakentamisessa käytetään symmetrisiä CLT-

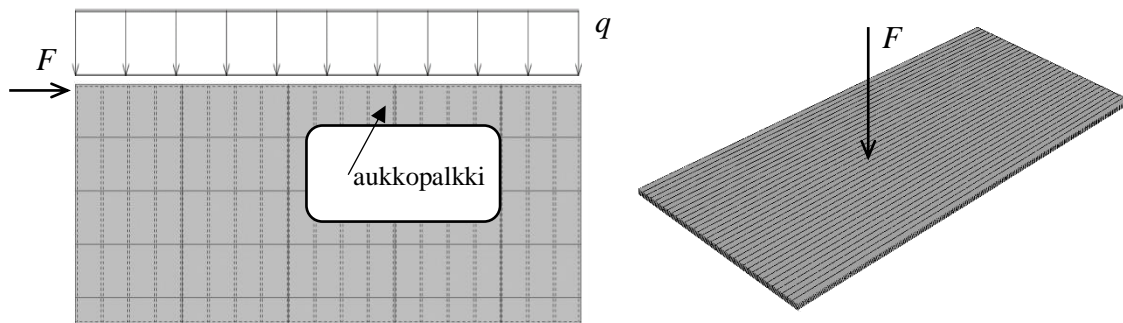
¹Vastuullinen kirjoittaja: sami.pajunen@tuni.fi

levyjä, mutta levyjen pitkittäis- ja poikittaiskerrosten paksuudet sekä eri kerroksissa käytetyn sahatavaran lujuusluokat voivat vaihdella valmistaja- ja tuotekohtaisesti.



Kuva 1. Tyypillisiä 3-, 5-, ja 7-kerroksisia CLT-levyjä

Valmistustavasta johtuen CLT-levyllä on hyvät jäykkyys- ja lujuusominaisuudet useammassakin suunnassa, jonka vuoksi levyä voidaan hyödyntää kustannustehokkaasti monissa erilaisissa käyttökohteissa kuvan 2 mukaisesti. Lujuusopillisessa mielessä CLT-rakenne voidaan mallintaa levynä, kun siihen kohdistuu vain tason suuntaisia kuormituksia. Erikoistapauksena tästä, CLT-levyä voidaan käyttää myös syrjätaivutettuna aukkopalkkina, jolloin sen lujuusopillinen toiminta on lähinnä levymäistä palkkia. Tapauksessa, jossa CLT-rakenteeseen kohdistuu vain sen tasoa vastaan kohtisuoria kuormia, rakenne voidaan mallintaa laattana tai reunaehtojen niin salliessa, taivutetun palkin tapaan toimivana laattakaistana.



Kuva 2. CLT-rakenteen käyttö kantavana ja jäykistävänä seinärakenteena sekä lattiarakenteena.

CLT-rakenteiden mitoitus perustuu lineaariseen kimmoteoriaan ja kerroksittain tehtäviin jännitystarkasteluihin, joissa sovelletaan yleisiä puurakenteiden mitoitusperiaatteita [1]. CLT-rakenteiden mitoitusohjeita on esitelty käsikirjoissa [2–4], joista kaksi ensimmäistä ovat Eurokoodien kanssa yhteensopivia. Suomessa ei ole käytössä omaa erillistä CLT-käsikirjaa, mutta ruotsalainen vastine [2] soveltuu erinomaisesti myös suomen mitoitusohjeeksi. Koska mitoitus perustuu poikkileikkauksen kerrosten jännitystarkasteluihin, myös käytettyjen analyysimenetelmien on kyettävä huomioimaan CLT-rakenteen kerroksellisuus. Tämä monimutkaistaa lujuuslaskentaa huomattavasti verrattuna homogeenisesta ja isotrooppisesta materiaalista tehdyn rakenteen analysointiin.

Tässä artikkelissa tarkastellaan yllä mainittua poikkitaikkuormitettua CLT-laattaa, jota käsitellään taivutettuna palkkina. Artikkelissa esitetään lapetaivutetun CLT-rakenteen yleisimmin käytettyjen laskentamenetelmien teoreettiset perusteet yksinkertaista geneeristä esimerkkirakennetta hyödyntäen ja samalla osoitetaan menetelmien yhtäläisyydet sekä oleellimmat eroavaisuudet. Havainnollisuuden vuoksi menetelmien keskeiset yhtälöt johdetaan seikkaperäisesti, noudatellen alan ensimmäisten tärkeimpien tieteellisten julkaisujen [5,6] lähestymistapaa. Ensin johdetaan kerrospalkkiteorian perusyhtälöt joustavilla liittimillä (nauloilla) kootulle poikkileikkaukselle, jonka jälkeen tarkastelu laajennetaan CLT-palkeille. Johdettuja yhtälöitä verrataan yleisesti käytössä olevaan Gamma-menetelmään sekä Kreuzingerin leikkausanalogiaan, ja lopuksi havainnollistetaan menetelmiä numeerisen esimerkin avulla.

Kerroksellisen palkin perusyhtälöt

Joustavin liittimin koottu poikkileikkaus

Tarkastellaan aluksi kuvassa 3a esitettyä kahdesta päällekkäisestä palkista koostuvaa taivutettua rakennetta. Mikäli osien välillä ei ole minkäänlaista liitosta, osat pääsevät vapaasti liukumaan toistensa suhteen. Merkitään tällöin osien välille syntyvää suhteellista siirtymää termillä φ_1 , joka voidaan lausua kuvan 3b mukaisesti taipuman ensimmäisen derivaatan $v_{,x}$ sekä poikkileikkauksen osien keskipisteiden välisen etäisyyden r avulla

$$\varphi_1 = r v_{,x}. \quad (1)$$

Toisaalta, jos poikkileikkauksen osat ovat ideaalisen jäykästi kiinni toisissaan, ei niiden välille synny lainkaan suhteellista siirtymää, kuten kuvassa 3c on havainnollistettu. Kuvassa 3 on myös esitetty poikkileikkauksen taivutusjännitys jakauma näissä kahdessa ääritapauksessa.

Kun poikkileikkauksen osat on kiinnitetty toisiinsa joustavilla liittimillä, poikkileikkauksen jännitysjakautuma muuttuu kuvan 4a mukaisesti täyden liittovaikutuksen sekä täysin kytkemättömän tapauksen väliin riippuen liitoksen leikkausjäykkyydestä. Kun oletetaan suunnitteluohjeiden mukaisesti liitoksessa syntyvän siirtymän φ olevan suoraan verrannollinen liitoksen välittämään voimaan F , voidaan näiden välille kirjoittaa yhteys

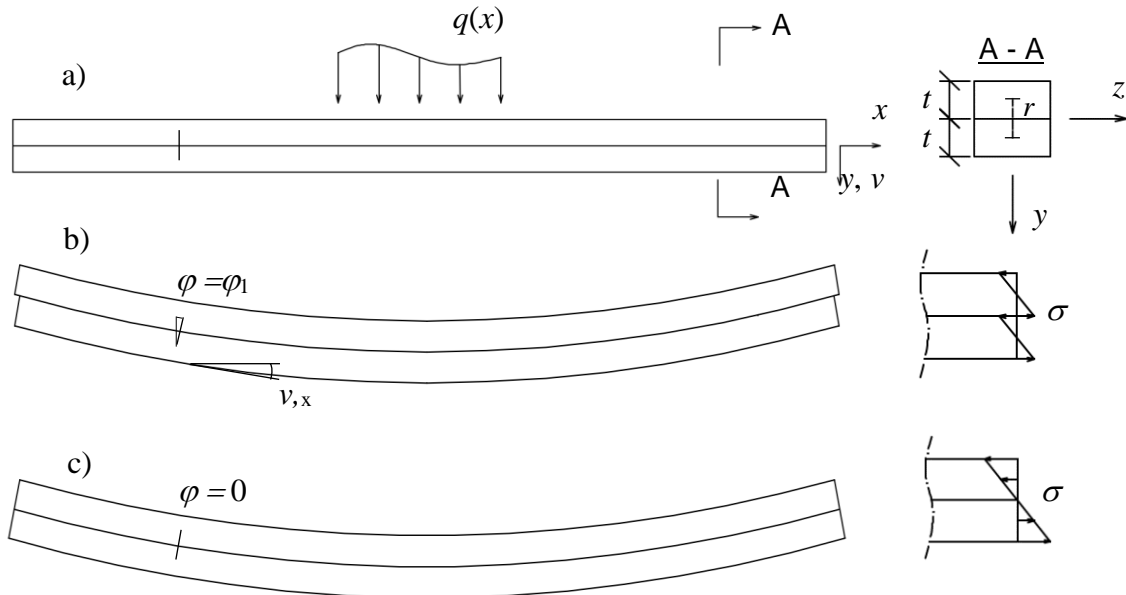
$$F = K_{ser} \varphi, \quad (2)$$

jossa K_{ser} on liitoksen siirtymäkerroin [3]. Tasavälein sijoitettujen yksittäisen liittimien sijaan poikkileikkauksen osat voidaan liittää toisiinsa myös samanarvoisella jatkuvalla joustavalla liitoksella, jolloin kuvan 4b avulla yhtälö (2) voidaan kirjoittaa muodossa

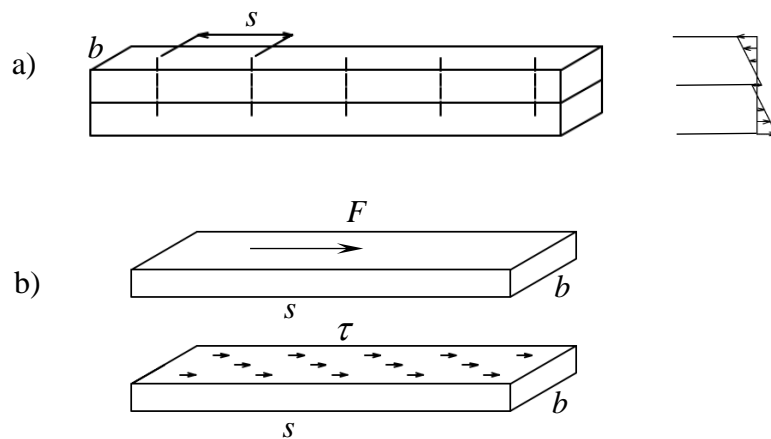
$$\tau = \frac{K_{ser}}{sb} \varphi := k \varphi, \quad (3)$$

jossa jäykkyyškertoimen k yksikkö on $[k] = \frac{N/mm}{mm^2}$. Joustavasti kootun palkin poikkileikkauksen taivutusjännitys jakauma voidaan jakaa kuvan 5 mukaisesti kahteen osaan,

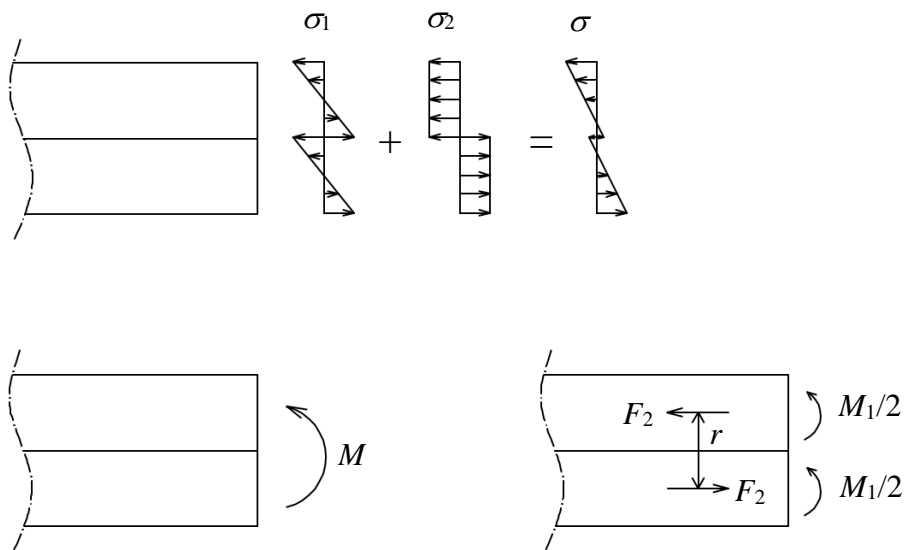
joista σ_1 aiheutuu kytkemättömien osien lokaalista taivutuksesta ja σ_2 osissa vaikuttavista lokaaleista normaaliavoimista.



Kuva 3. a) Kahdesta osasta muodostettu palkki ja sen poikkileikkaus, b) muodonmuutokset ja taivutusjännitys ilman liittovaikutusta, c) muodonmuutokset ja taivutusjännitys täydellä liittovaikutuksella.



Kuva 4. a) Joustavilla liittimillä koottu poikkileikkaus ja sen taivutusjännitysjakautuma, b) osien välisen kytkennän aiheuttamat voima- ja jännitysjakautumat diskreetin liittimen sekä joustavan liitoksen tapauksissa.



Kuva 5. Taivutusjännityksen jako kahteen osaan.

Poikkileikkauksen osien välinen suhteellinen siirtymä φ koostuu vastaavista osista φ_1 ja φ_2 siten, että

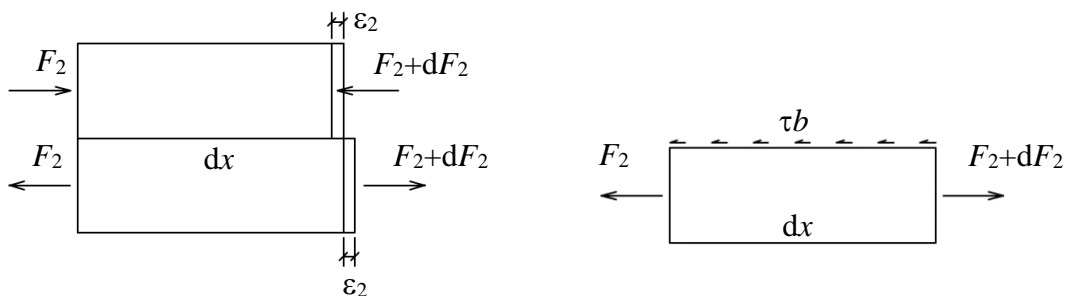
$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2. \quad (4)$$

Näistä edellinen on esitetty yhtälössä (1) ja jälkimmäisen selvittämiseksi tarkastellaan kuvan 6 mukaista palkin differentiaalista osaa. Merkitsemällä poikkileikkauksen kummankin osan aksiaalivoimasta F_2 aiheutuvaa venymää termillä ε_2 , saadaan $d\varphi_2 = 2\varepsilon_2 dx$ ja venymälle ε_2 tulos

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \varphi_{2,x} \quad (5)$$

Olettamalla suunnitteluohjeiden mukaisesti puumateriaali lineaarisesti kimmoiseksi, normaalijännitykselle σ_2 saadaan

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} E \varphi_{2,x}. \quad (6)$$



Kuva 6. Palkin differentiaalisen osan tarkastelu.

Kuvassa 6 esitetyn vapaakappalekuvan vaakasuuntaisten voimien tasapainoyhtälöstä saadaan edelleen

$$\tau b = F_{2,x} \quad (7)$$

ja

$$\Rightarrow \tau b = \sigma_{2,xx} A. \quad (8)$$

Sijoittamalla tähän yhtälöiden (6) ja (3) mukaiset tulokset, päädytään tulokseen

$$k\varphi = \frac{EA}{2b} \varphi_{2,xx}. \quad (9)$$

Yhtälön (4) mukaisesti voidaan kirjoittaa

$$\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 = \varphi - rv_{,x}, \quad (10)$$

jossa on huomioitu myös yhtälö (1). Derivoimalla saatua yhtälöä (10) puolittain kahdesti ja sijoittamalla saatu lauseke yhtälöön (9), päädytään osien välisen suhteellisen siirtymän differentiaaliyhtälöön

$$\varphi_{,xx} - \frac{2bk}{EA} \varphi = rv_{,xxx}. \quad (11)$$

Differentiaaliyhtälöstä (11) nähdään, että se liittyy kinematiikkaan, ja kytkee toisiinsa osien välisen siirtymän $\varphi(x)$ sekä palkin taipuman $v(x)$. Yhtälön (11) ratkaisemiseksi tarkastellaan palkin poikkileikkauksen rasitusten ja taipuman välistä yhteyttä. Kuten edellä on kerrottu ja kuvassa 5 on havainnollistettu, joustavalla liitoksella kootun palkin taivutusjäännitykset voidaan jakaa osiin, jotka syntyvät osien lokaalista taivutuksesta sekä aksiaalisesta kuormituksesta. Kuvan 5 merkintöjä käyttäen voidaan poikkileikkausta rasittava taivutusmomentti kirjoittaa muodossa

$$M = M_1 + M_2 = -2EI_1 v_{,xx} + F_2 r, \quad (12)$$

jossa termin M_1 osalta on poikkileikkauksen kummallekin osalle sovellettu tavanomaista teknistä taivutusteoriaa, ja merkinnällä I_1 tarkoitetaan palkin jommankumman osan neliömomenttia oman pintakeskiön suhteen. Tyypillisesti kerroksellisissa palkeissa leikkausmuodonmuutos syntyy lähes yksinomaan liitoksissa, eikä näin ollen yleensä ole tarvetta soveltaa poikkileikkauksen osille esimerkiksi Timoshenkon palkkiteoriaa. Näin ollen teknisen taivutusteorian käyttö yhtälössä (12) on perusteltua. Toteamalla, että $F_2 = \sigma_2 A$ ja soveltamalla kaavoja (6) ja (12), päästään lopulta termejä sieventämällä taipuman differentiaaliyhtälöön

$$v_{,xx} - \frac{EA r}{EI} \varphi_{,x} = -\frac{M}{EI}, \quad (13)$$

jossa neliömomentti I tarkoittaa koko poikkileikkauksen neliömomenttia koostuen lokaaleista osista sekä ns. Steinerin termistä siten, että

$$I = 2 \left(I_1 + A \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right). \quad (14)$$

Mikäli taivutusmomentti $M(x)$ on tunnettu funktio, edellä johdetuista differentiaaliyhtälöistä (11) ja (13) voidaan ratkaista joustavasti kootun symmetrisen kaksiosaisen palkin taipuman $v(x)$ sekä osien välisen suhteellisen siirtymän $\varphi(x)$ lausekkeet. Yhtälöistä (11) ja (13) voidaan sieventämällä sekä edellä johdettuja yhtälöitä käyttämällä eliminoida suhteellisen siirtymän termi pois, jolloin päädytään yhteen taipuman neljännen kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$v_{,xxxx} - \frac{bk}{EI_1 EA} (EI v_{,xx} + M) = -\frac{M_{,xx}}{2EI_1}. \quad (15)$$

Differentiaaliyhtälöpari (11) ja (13) sekä yhtälö (15) soveltuvat siis probleemamme ratkaisemiseen staattisesti määrättyssä tapauksessa, jolloin taivutusmomentti $M(x)$ on voitu määrittää etukäteen. Edellä on tarkasteltu havainnollisuuden vuoksi yksinkertaisinta mahdollista joustavasti koottua kerrospalkkia, mutta vastaava yhtälöiden johtaminen voidaan tehdä yleisemmässä tapauksessa, jolloin päädytään esimerkiksi yhtälön (15) kanssa analogiseen kerrospalkkiteorian yhtälöön

$$v_{,xxxx} - \frac{bK}{B_0 B_s} (B v_{,xx} + M) = -\frac{M_{,xx}}{B_0}, \quad (16)$$

jossa B_0 tarkoittaa poikkileikkauksen kerrosten lokaalien (eli kerrosten omien pintakeskiöiden suhteen laskettujen) taivutusjäykkyyksien summaa, B_s osien aksiaalijäykkyyksistä koostuvien Steinerin termien summaa, K leikkauskerrointa, ja termi B osien B_0 ja B_s summaa. Huomattavaa on, että kerrospalkkiteorian differentiaaliyhtälö (16) on varsin yleinen, sillä poikkileikkauksen jokainen kerros sekä jokainen liitoskerros voi olla erilainen. Lisäksi kerrospalkkiteoria voidaan johtaa staattisesti määräämättömälle tapaukselle, joka mahdollistaa mielivaltaisten reunaehtojen käyttämisen. Kerrospalkkiteorian soveltamista CLT-rakenteille on tarkasteltu lähteissä [7,8] ja tämän artikkelin liitteessä A on esitetty keskeisimmät yhtälöt, joita tarvitaan taivutettujen CLT-palkkien yleisimmissä kuormitus- ja tuentatapauksissa.

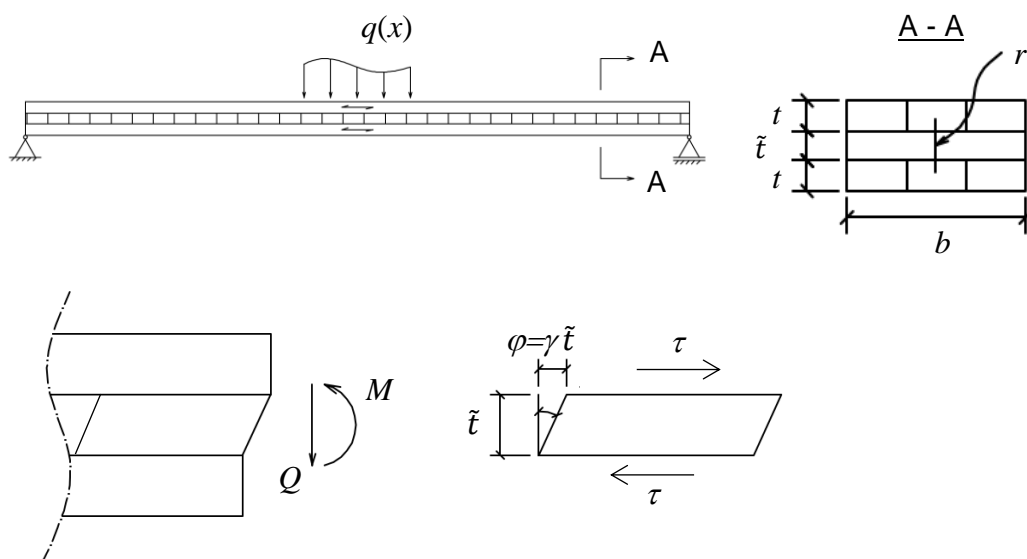
CLT-poikkileikkaus

Tarkastellaan kuvassa 7 esitettyä taivutettua CLT-poikkileikkausta, joka koostuu kolmesta kerroksesta. Valittujen syysuuntien mukaisesti poikkileikkauksen taivutusjäykkyys koostuu lähes yksinomaan reunakerrosten jäykkyyksistä, kun taas keskimmainen kerros toimii reunakerroksia yhdistävänä joustava liitoksena. Kuvan 7 mukaisesti keskimmäisen kerroksen leikkausjännityksen ja siitä aiheutuvan siirtymän välille voidaan kirjoittaa yhteys

$$\tau = G_R \gamma = \frac{G_R}{\bar{t}} \varphi := k_{CLT} \varphi, \quad (17)$$

jossa termi k_{CLT} on kaavan (3) mukaisesti CLT-poikkileikkauksen poikittaiskerroksen jäykkyyserroin. On huomattava, että puun leikkausjäykkyys G_R syitä vastaan kohtisuori-

rassa tasossa on tyypillisesti vain noin 10% verrattuna leikkausjäykkyyksiin G_0 ja G_{90} syyn suuntaisissa tasoissa. Näin ollen kuvassa 7 esitetyn CLT-palkin taipumien laskentaan voidaan soveltaa esitettyä differentiaaliyhtälöä (15), kunhan jäykkyyksikertoimena k käytetään kaavan (17) mukaista kerrointa k_{CLT} , ja samalla huomioidaan, että poikkaiskerroksen paksuus \tilde{t} kasvattaa pitkittäisten lamellien keskipisteiden välistä etäisyyttä r . Luonnollisesti sama yleistys voidaan tehdä useampikerroksisille CLT-poikkileikkauksille, joten myös yleisempi kerrosrakenteen differentiaaliyhtälö (16) soveltuu lapetaivutettujen CLT-palkkien analysointiin.



Kuva 7. Kolmelamellinen CLT-palkki sekä sen poikkaiskerroksen toimiminen joustavana liittimenä.

Poikkileikkauksen jännitysten laskenta voidaan tehdä kun edellä esitetyistä differentiaaliyhtälöistä on ratkaistu taipuma $v(x)$, osien suhteellinen siirtymä $\varphi(x)$, sekä näiden tarvittavat derivaatat. Joustavasti osista koostuvan poikkileikkauksen taivutusjännitys koostuu kuvan 5 mukaisesti kahdesta osasta siten, että

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \quad (18)$$

jossa

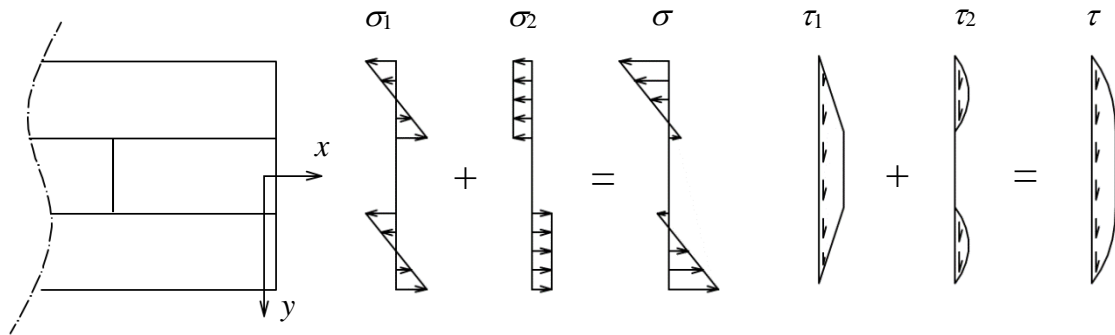
$$\sigma_1 = \frac{M_1}{z} = \frac{-E \frac{I_1}{2} v_{,xx}}{W_1} = -E t v_{,xx}, \quad (19)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{2} \varphi_{2,x} = \frac{E}{2} (\varphi_{,x} - r v_{,xx}). \quad (20)$$

Yhtälöitä (19) ja (20) vastaavien taivutusjännityksen komponenttien lausekkeet yleisessä kerrosrakenteen mukaisessa muodossa on esitetty Liitteen A yhtälössä (A.11). Leikkausjännitys koostuu vastaavasti kahdesta osasta. Leikkausjännitys τ_1 osien välisessä liitoksessa saadaan yhtälöiden (6) ja (8) avulla lausuttua muodossa

$$\tau_1 = -\frac{Et}{2}\varphi_{2,xx} = -\frac{Et}{2}(\varphi_{,xx} - rv_{,xxx}). \quad (21)$$

Kaavan (8) avulla nähdään myös, että leikkausjännitys τ_1 pienenee lineaarisesti nollaan siirryttäessä kohti poikkileikkauksen ulkoreunoja. Poikkileikkauksen ylä- ja alaosissa vaikuttaa tämän lisäksi leikkausjännitys τ_2 , joka saadaan määritettyä teknisen taivutus-teorian mukaisesti Jourawskin kaavalla. Leikkausjännitysten yhtälöt yleisessä muodossa on esitetty Liitteen A yhtälöissä (A.12) ja (A.13). Havainnollisuuden vuoksi poikkileikkauksen jännitysjakautumat on esitetty kuvaa 5 vastaavassa CLT-poikkileikkauksessa kuvassa 8.



Kuva 8. CLT-palkin taivutus- ja leikkausjännitykset komponenteittain.

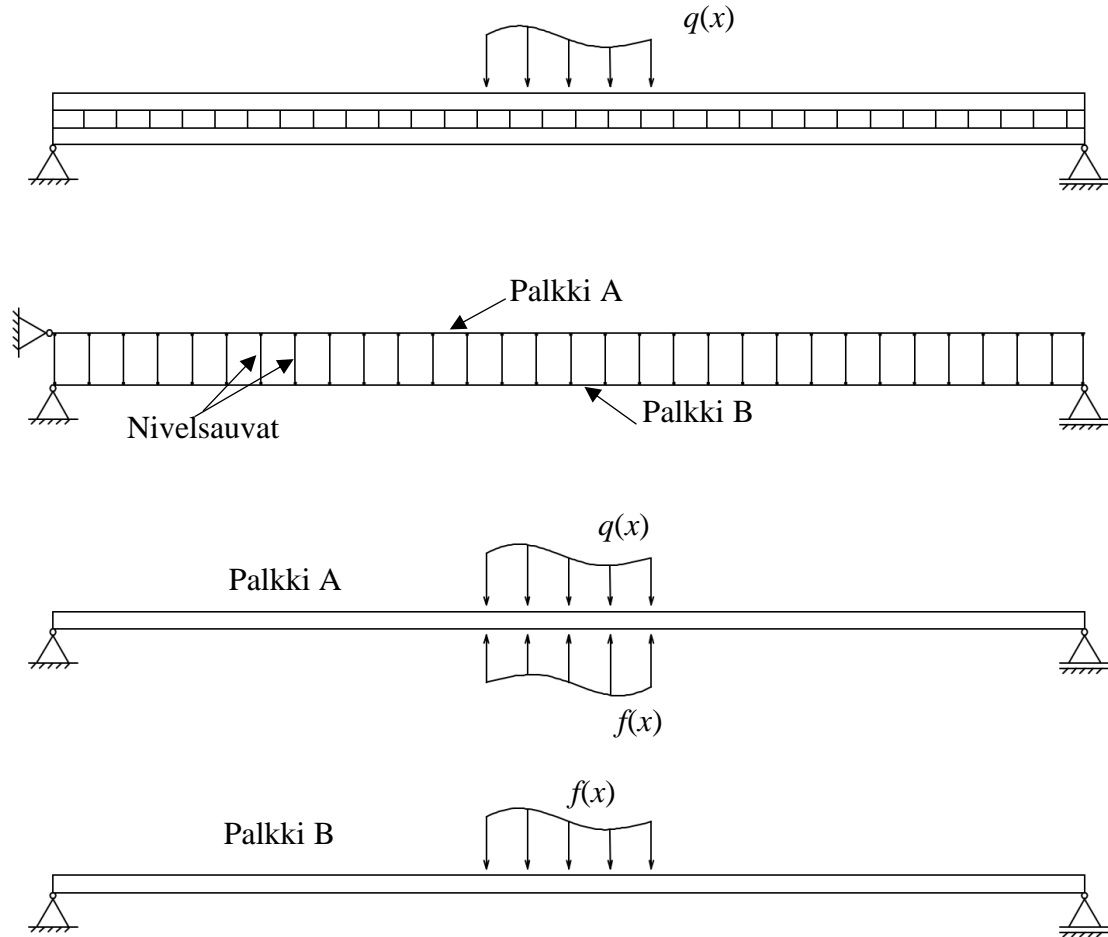
Edellä johdettua teoreettista tarkastelua hyödynnetään seuraavaksi muutamien yleisesti käytettyjen menetelmien yhtäläisyyksien ja erojen selvittämiseen. Tässä artikkelissa käsitellään Kreuzingerin esittämää leikkausanalogiaan perustuva menetelmää (Shear analogy) sekä yleisesti käytettyä Gamma-menetelmää sekä sen laajennettua versiota (Gamma method, γ -method, Extended Gamma-method). Sen sijaan vaikka Timoshenkon palkkiteoriaa on myös sovellettu lapetaivutettujen CLT-palkkien analysointiin, sen soveltamista ei tässä yhteydessä käsitellä, sillä sen vaikutus rajoittuu ainoastaan taipumien lausekkeissa syntymiin lisätermiin.

CLT-palkille räätälöidyt analysointimenetelmät

Kreuzingerin leikkausanalogia

Kreuzingerin esittämä menetelmä, ns. leikkausanalogia (Shear analogy), pohjautuu kerros-palkkiteorian differentiaaliyhtälön (16) jakamiseen kahteen erilliseen osaan sekä näiden osatehtävien numeeriseen ratkaisemiseen [9]. Menetelmän alkuperäinen lähde [9] on hankalasti saatavissa, mutta menetelmää on esitelty tämän artikkelin lisäksi esimerkiksi lähteissä [4] ja [10]. Menetelmän osatehtävät on muodostettu sitä silmällä pitäen, että niiden numeerisessa ratkaisussa voidaan hyödyntää FEM-valmisohjelmia, kunhan ne pystyvät huomioimaan palkin leikkausmuodonmuutoksesta aiheutuvan taipuman. Tarkastellaan kuvassa 9 esitettyä palkkia, joka jaetaan kahteen kuvitteelliseen osaan. Ylempänä kuvatun kuvitteellisen palkin A taivutusjäykkyys koostuu palkin osien lokaaleista taivutusjäykkyyksistä EI_1 , mutta leikkausjäykkyys GA oletetaan äärettömän suureksi. Toisin sanoen, palkki A on teknisen taivutusteorian mukainen. Vastaavasti kuvitteellisen

palkin B taivutusjäykkyys koostuu aksiaalijäykkyystermeistä EAr^2 , ja leikkausjäykkyys GA joustavien liittimien leikkausjäykkyystermeistä $bk_{CLT}r^2$, jotka on saatu kertomalla yhtälö (17) termillä br^2 . Mikäli halutaan ottaa huomioon myös pitkittäislamellien leikkausjäykkyydet bG_0r^2/t , ne voidaan huomioida palkin B leikkausjäykkyydessä, kuten lähteissä [4,11] on esitetty. Kummankin palkin materiaali oletetaan isotrooppiseksi.



Kuva 9. CLT-palkin jako kahteen kuvitteelliseen palkkiin A ja B.

Edellisen mukaisesti palkki B on mallinnettava Timoshenkon palkkimallilla tai vastaavalla leikkausmuodonmuutokset huomioivalla palkkielementillä. Kuvitteellisten palkkien A ja B mallinnuksen jälkeen ne kytketään toisiinsa lyhyillä ideaalisen jäykillä nivelpäisillä sauvoilla kuvan 9 mukaisesti. Näiden sauvojen avulla palkkien A ja B taipumat pakotetaan samoiksi. Kuvitteellisille palkeille A ja B voidaan edellä esitetyn perusteella kirjoittaa taipuman differentiaaliyhtälöt seuraavasti. Palkki A noudattaa teknistä taivutus-teoriaa, joten sille pätee

$$v_{,xxxx} = \frac{q(x)-f(x)}{(EI)_A}, \quad (22)$$

jossa $(EI)_A$ on kuvan 9 kolmelamellisen CLT-palkin tapauksessa $2EI_1$. Palkille B voidaan vastaavasti kirjoittaa differentiaaliyhtälön (15) perusteella

$$2(EI_1)_B v_{,xxxx} - \frac{2bk}{(EA)_B} (EI v_{,xx} + M) = -M_{,xx}. \quad (23)$$

Palkin B taivutusjäykkyyden määritelmän mukaan se koostuu vain aksiaalijäykkyystermeistä, joten lausekkeen ensimmäinen termi on nolla. Huomioimalla lisäksi palkin taivutusmomentin tasapainoyhtälö $M(x)_{,xx} = f(x)$, saadaan palkin B taipumaa kuvaavaksi differentiaaliyhtälöksi

$$-\frac{2bk}{(EA)_B} (EI v_{,xx} + M) = f(x). \quad (24)$$

Kreuzingerin menetelmän käytössä on huomionarvoista, että kuvitteellisten palkkien A ja B differentiaaliyhtälöt (22) ja (24) on tarkoitettu ratkaistavaksi numeerisesti elementtimenetelmällä kuten kuvassa 9 on esitetty. Tähän tarkoitukseen on kätevin soveltaa jotakin FEM-valmisohjelmaa. Näin saaduista palkkien A ja B taivutusmomenttien ja leikkausvoimien arvoista saadaan jälkilaskentana todellisen CLT-poikkileikkauksen taivutus- ja leikkausjännitys jakaumat kerrospalkkiteorian tapaan kuten Liitteessä A on esitetty. Kreuzingerin menetelmä voidaan tulkita käytännölliseksi, numeeriseksi tavaksi kerrospalkkiteorian differentiaaliyhtälön (15) ratkaisemiseen. Menetelmien identtisyys voidaan lähteen [7] mukaan todeta ratkaisemalla kuvitteellisen palkin A differentiaaliyhtälöstä voimajakautuman $f(x)$ lauseke muodossa

$$f(x) = q(x) - 2EI_1 v_{,xxxx}. \quad (25)$$

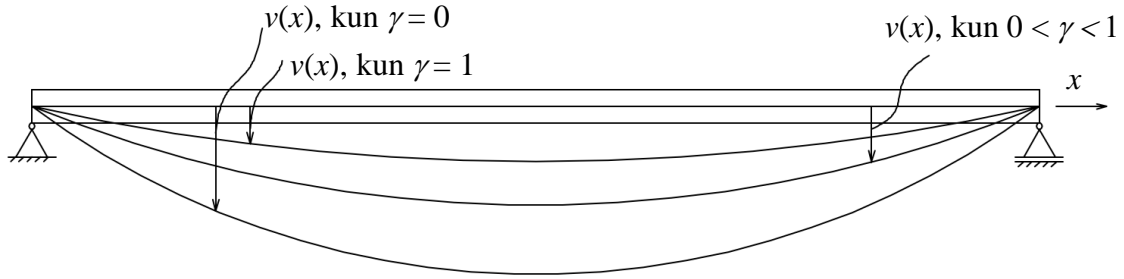
Sijoittamalla saatu lauseke palkin B differentiaaliyhtälöön (24) nähdään sievennysten jälkeen sen johtavan yhtälöön (15), jolloin voidaan todeta, että Kreuzingerin menetelmä on numeerinen sovellus kerrospalkkiteorian yhtälöiden ratkaisemiseksi. Menetelmän käyttöä FEM-ohjelman avulla on tarkasteltu yksityiskohtaisemmin laskentaesimerkin yhteydessä.

Gamma-menetelmä

Gamma-menetelmä perustuu Karl Möhlerin väitöskirjaan vuodelta 1956, jossa johdetaan puuosista koostuville taivutetuille palkeille taipuman differentiaaliyhtälö, joka on identtinen edellä esitetyn yhtälön (16) kanssa [6]. Möhler kuitenkin käsittelee työssään vain kahdesta tai kolmesta osasta naulaamalla koottuja symmetrisiä poikkileikkauksia, jotka yhtälön (17) mukaisesti vastaavat symmetrisiä kolme- ja viisikerroksisia CLT-palkkeja. Möhler ottaa työssään käyttöön ns. γ -parametrin (liittovaikutusparametrin), joka kuvan 10 mukaisesti määrittelee osien välisen liittovaikutuksen siten, että arvo $\gamma=1$ kuvaa täyttää liittovaikutusta ja arvo $\gamma=0$ tilannetta, jossa poikkileikkauksen osien välillä ei ole lainkaan kytkentää. Muut gamman arvot tältä väliltä kuvaavat osittaista liittovaikutusta, ja poikkileikkauksen neliömomentti voidaan lausua muodossa

$$I = \sum I_i + \gamma \sum A_i e_i^2 := I_{ef}, \quad (26)$$

jossa jälkimmäinen ns. Steinerin termi koostuu osien pinta-aloista sekä osien pintakeskiöiden etäisyyksistä neutraaliakselilta. Kuvan 3 mukaisilla termeillä $A_i = A$ ja $e_i = r/2$. Kaavassa (26) on erityisesti huomattavaa, että määrittelemällä alkuperäisen lähteen [6] mukaisesti vain yhden γ -kertoimen, CLT-poikkileikkauksen jokaisen poikkittaisen kerroksen on oltava samanlainen, ja lisäksi poikkileikkauksen on oltava symmetrinen. Gammamenetelmän yhteydessä kaavan (26) mukaista neliömomenttia kutsutaan teholliseksi neliömomentiksi I_{ef} .



Kuva 10. Liittovaikutuksen suuruuden vaikutus palkin taipumaan.

Käytännön tuloksista tiedetään, että osista kootun taivutetun palkin taivutusjäykkyys kasvaa sitä suuremmaksi, mitä lyhyempi ja korkeampi palkki on. Toisin sanoen, liittovaikutusparametri γ on suoraan verrannollinen poikkileikkauksen palkin pituuden L ja reunimmaisten osien pinta-alojen A suhteen L^2/A kanssa. Möhler esittää tähän liittyen runsaasti graafisia ratkaisuja γ :n arvolle erilaisissa taivutustehtävissä, mutta suljetussa muodossa parametrille ei löydy ratkaisua taipuman differentiaaliyhtälön (16) ratkaisujen luonteesta johtuen (tarkemmin Liitteessä A). Parametrille γ saadaan kuitenkin johdettua lauseke Möhlerin esimerkin mukaisesti, kun tarkastellaan puristetun niveltuetun pilarin nurjahdusta. Tällöin kaksiosaisen poikkileikkauksen (tai vastaavasti 3-kerroksisen CLT-poikkileikkauksen) taipuman differentiaaliyhtälö (15) sievenee sijoituksen $M(x) = Pv(x)$ avulla homogeeniseksi differentiaaliyhtälöksi

$$v_{,xxxx} + \left(\frac{P}{2EI_1} - \frac{bkEI}{EI_1EA} \right) v_{,xx} - \frac{bkP}{EI_1EA} v = 0. \quad (27)$$

Homogeenisen differentiaaliyhtälön nollasta poikkeava ratkaisu saadaan tunnetusti kinemaattisesti käyvällä sinimuotoisella yritteellä

$$v(x) = c_1 \sin \frac{\pi}{L} x, \quad (28)$$

jonka sijoitus yhtälöön (27) johtaa sieventämisen jälkeen nurjahduskuorman lausekkeeseen

$$P_n = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 E \left(\frac{Ibk + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 EAI_1}{bk + \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EA}{2}} \right). \quad (29)$$

Vertaamalla tätä teknisen taivutusteorian Eulerin nurjahduskuorman lausekkeeseen $P_n = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI$, voidaan yhtälön (29) jälkimmäinen sulkulauseke tulkita teholliseksi neliömomentiksi

$$I_{ef} = \frac{Ibk + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EAI_1}{bk + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \frac{EA}{2}}. \quad (30)$$

Käyttäen hyväksi yhteyttä (16), lauseke (30) voidaan sieventää muotoon

$$I_{ef} = 2I_1 + \gamma 2A \left(\frac{r}{2}\right)^2, \quad (31)$$

jossa

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EA/2}{L^2 kb}}. \quad (32)$$

Vertaamalla lauseketta (31) yleisempään tehollisen neliömomentin I_{ef} määrittelykaavaan (26) nähdään, että kaava (32) esittää liittovaikutusparametria γ kahdesta osasta muodostetun palkin tapauksessa. Kaava (32) voidaan edelleen muokata yhtälön (17) avulla CLT-poikkileikkaukselle sopivaksi

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E\bar{t}A/2}{L^2 G_R b}}. \quad (33)$$

Saadussa lausekkeessa (33) on huomattavaa, että johdettu tulos pätee sellaisenaan vain kuvan 8 mukaiselle symmetriselle, 3-kerroksiselle CLT-poikkileikkaukselle. Viisi- ja kolmikerroksiselle mielivaltaiselle poikkileikkaukselle liittovaikutusparametrin γ_i lauseke pitkittäislamellille i saadaan edellä esitetyllä tavalla soveltamalla yhtälöä (16) sekä määrittelemällä neliömomentti aiemmasta poiketen muodossa

$$I_{ef} = \sum(I_i + \gamma_i A_i e_i^2). \quad (34)$$

Näin saatujen γ -parametrien lausekkeet sekä yhtälössä (34) esiintyvän termin e_i määritelmät on esitetty Eurokoodin [1] liitteessä B yleisessä muodossa siten, että ne soveltuvat sekä 3- että 5-kerroksisille levyille. Gamma-menetelmästä voidaan edellä esitetyn nojalla todeta, että vaikka menetelmän teoreettinen perusta on yhtälön (16) mukaisesti kerros-palkkiteoriassa, määritelmien (26) ja (34) avulla Gamma-menetelmä palautuu käytettäväksi perinteisen teknisen taivutusteorian yhteydessä, mikä tekee siitä erityisen helposti sovellettavan menetelmän. Menetelmän haittapuolena on sen sovellettavuuden rajoitukset, sillä se sopii sellaisenaan vain 3- ja 5-kerroslevyjen analysointiin. Lisäksi menetelmä on tarkimmillaan yksiaukkoisessa palkissa, jonka taipuma noudattelee *sin*-funktiota. Seuraavassa luvussa esitystä esimerkistä kuitenkin nähdään, että kuormitustapauksen vaikutus tarkkuuteen on varsin pieni. Lisäksi kirjallisuudessa esitetyt taulukon 1 mukaiset approksimaatiot lausekkeessa (33) käytettävälle palkin pituudelle L antavat käytännön kannalta riittävän hyviä tuloksia myös muissa kuin yksiaukkoisen palkin tapauksessa [3].

Taulukko 1. Palkin tehollinen pituus. L on palkin pituus, L_{\min} on jatkuvan palkin lyhimmän aukon pituus, ja L_n on nurjahduspituus.

<i>Rakenne</i>	<i>Kaavassa (32) käytettävä pituuden L arvo</i>
Yksiaukkoinen palkki	L
Jatkuva palkki	$0,8L_{\min}$
Ulokepalkki	$2L$
Puristettu sauva	L_n

Gamma-menetelmään liittyvä taivutusjännityksen lauseke koostuu yhtälön (18) mukaisesti lamellin keskipisteen jännityksestä σ_2 sekä lamellin lokaalista taivutuksesta aiheutuvasta jännityksestä σ_1 . Lamellin keskipisteen jännitys σ_2 saadaan johdettua yhtälön (12) mukaisesti lausumalla momentin komponentti M_2 muodossa

$$M_2 = M - M_1, \quad (35)$$

joka saadaan kirjoitettua teknisen taivutusteorian differentiaaliyhtälöä sekä kuvassa 5 esitettyä määritelmää hyödyntäen muodossa

$$M_2 = M \left(1 - \frac{\sum EI_i v_{,xx}}{EI v_{,xx}} \right) = M \left(1 - \frac{\sum I_i}{I} \right) = \frac{M}{I} (I - \sum I_i), \quad (36)$$

Sijoittamalla saatuun yhtälöön Gamma-menetelmän mukainen neliömomentin I_{ef} lauseke (26), päädytään tulokseen

$$M_2 = \frac{M}{I_{ef}} \gamma \sum A_i e_i^2. \quad (37)$$

Kun sovelletaan saatuun yhtälöä (37) kuvan 8 mukaiselle 3-lamelliselle CLT-poikkileikkaukselle, saadaan yhtälön (12) määritelmän avulla pitkittäislamellin keskipisteen jännityksen lausekkeeksi

$$\sigma_2 = \frac{M_2}{rA} = \frac{M}{I_{ef}} \gamma \frac{A \left(\frac{r}{2} \right)^2 + A \left(\frac{r}{2} \right)^2}{rA} = \frac{M}{I_{ef}} \gamma \frac{r}{2}. \quad (38)$$

Vastaavasti lokaalista taivutuksesta aiheutuva, lamellin reunalla arvon σ_1 saava jännityskomponentti saadaan lausumalla taivutusmomentin komponentti M_1 muodossa

$$M_1 = \frac{M}{I} \sum I_i, \quad (39)$$

josta seuraa kuvan 5 mukaisesti

$$\sigma_1 = \frac{\frac{M}{I} \sum I_i t}{\sum I_i \frac{t}{2}} = \frac{M}{I_{ef}} \frac{t}{2}. \quad (40)$$

Näin ollen kuvan 8 mukaisen 3-lamellisen CLT-poikkileikkauksen reunalla esiintyvä taivutusjännityksen suurin arvo saadaan lausekkeesta

$$\sigma_{max} = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{M}{I_{ef}} \left(\frac{t}{2} + \gamma \frac{r}{2} \right). \quad (41)$$

Reunajännitys voidaan saadun tuloksen mukaisesti kirjoittaa myös määrittelemällä tehollinen taivutusvastus W_{ef} siten, että

$$\sigma_{max} = \frac{M}{\frac{I_{ef}}{\frac{r}{\gamma_2 + \frac{t}{2}}}} := \frac{M}{W_{ef}}. \quad (42)$$

Yhtälön (41) mukaisesti taivutusjännityksiä laskettaessa liittovaikutusparametri γ esiintyy sekä neliömomentin I_{ef} lausekkeessa että lamellin keskipisteen neutraaliakselilta mitatun etäisyyden kertoimena.

Poikkileikkauksen leikkausjännitysten lausekkeet Gamma-menetelmässä johdetaan normaalijännityksiä vastaavalla tavalla. Yhtälön (8) mukaisesti leikkausjännitys poikittaislamellin kohdalla saadaan lausekkeesta

$$\tau = \frac{A}{b} \sigma_{2,x}. \quad (43)$$

Edellä käsitellyn 3-lamellisen CLT-poikkileikkauksen tapauksessa tämä voidaan yhtälön (37) avulla kirjoittaa muotoon

$$\tau = \frac{A}{b} \left(\frac{M}{I_{ef}} \gamma \frac{r}{2} \right)_{,x} = \frac{Q \gamma \frac{r}{2} A}{b I_{ef}} := \frac{Q S_{ef}}{b I_{ef}}, \quad (44)$$

jossa on otettu käyttöön tehollisen staattisen momentin lauseke. Leikkausjännityksien laskennassa on normaalijännitysten tapaan huomioitava, että Gamma-menetelmässä liittovaikutusparametri esiintyy paitsi neliömomentissa, myös pitkittäislamellin neutraaliakselilta mitatun etäisyyden kertoimena.

Laajennettu Gamma-menetelmä

Kun CLT-poikkileikkauksen kerrosten lukumäärä on suurempi kuin viisi, edellä esitetyllä tavalla johdetut γ -parametrien lausekkeet eivät enää ratkea suljetussa muodossa. Fysikaalisesti tämä johtuu siitä, että yli 5-kerroksissa poikkileikkauksessa on pitkittäislamelleja, joihin liittyvä joustavuus ei enää määräydy pelkästään sen kahden vierekkäisen poikittaislamellin perusteella, vaan siihen vaikuttaa myös reunempana sijaitsevat poikittaislamellit. Tällaisessa tapauksessa liittovaikutusparametrien γ_i arvot saadaan lineaarisesta yhtälöryhmästä

$$\begin{bmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} & 0 & 0 & 0 \\ v_{2,1} & v_{2,2} & v_{2,3} & 0 & 0 \\ 0 & v_{3,2} & v_{3,3} & v_{3,4} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & v_{m,m-1} & v_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ \vdots \\ s_m \end{bmatrix}, \quad (45)$$

jossa tri-diagonaalisen systeemimatriisin termit lasketaan pitkittäiskerroksen i jäykkyyden D_i sekä kahden pitkittäiskerroksen i ja j välisen poikittaiskerrosten jäykkyyden $C_{i,j}$ avulla seuraavasti:

$$v_{i,i-1} = -C_{i-1,i}a_{i-1}, \quad (46)$$

$$v_{i,i} = (C_{i-1,i} + C_{i,i+1} + D_i)a_i, \quad (47)$$

$$v_{i,i+1} = -C_{i,i+1}a_{i+1}, \quad (48)$$

$$C_{j,k} = \frac{bG_{R,jk}}{d_{j,k}}, \quad (49)$$

$$D_i = \frac{\pi^2 E_i b d_i}{L^2}. \quad (50)$$

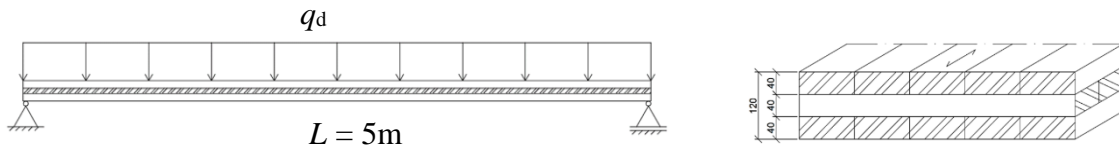
jossa pitkittäiskerroksen i poikkileikkauksen pintakeskiöstä mitattua etäisyyttä on merkitty termillä a_i . Yhtälöryhmän (45) oikean puolen vektorin alkio s_i sisältää pitkittäisla-mellin i viereisten poikittaiskerrosten jäykkyydet muodossa

$$s_i = C_{i-1,i}(a_i - a_{i-1}) - C_{i,i+1}(a_{i+1} - a_i). \quad (51)$$

Esitetyt yhtälöt (45) – (51) kutsutaan lähteen [3] mukaisesti *laajennetuksi Gamma-menetelmäksi*. Yhtälöryhmän (45) ratkaisemisen jälkeen saatuja liittovaikutusparametrejä hyödynnetään kuten tavallisessakin Gamma-menetelmässä.

Menetelmien vertailu numeerisen esimerkin avulla

Tarkastellaan lähteen [11] mukaisesti kuvassa 11 esitettyä yksiaukkoista CLT-rakennetta, jonka poikkileikkaus koostuu kolmesta 40 mm paksuisesta C24-lujuusluokan sahatavara-rasta. Lamellien kimmokertoimet syiden suunnassa ovat $E_0 = 11500$ MPa ja $G_0 = 650$ MPa. Keskimmäisen lamellin materiaaliarvoista vain syitä vastaan kohtisuoran suunnan liukumoduulin G_R arvoa hyödynnetään laskennassa. Sille käytetään tyypillistä oletusarvoa $G_R = G_0/10 = 65$ MPa. CLT-levystä tarkastellaan yhden metrin levyistä kaistaa, jolle kohdistuu pysyvä ominaiskuorma $g_k = 1,0$ kN/m² sekä ominaishyötykuorma $q_k = 2,0$ kN/m². Taipumien laskennassa käytetään kuormien ominaisyhdistelmää, jolloin tasaisen kuorman arvoksi saadaan $q_{d,1} = 3,0$ kN/m. Vastaavasti jännitystarkasteluissa käytetään keskipitkän aikaluokan kuormitusyhdistelmää, joka johtaa tasaisen kuorman arvoon $q_{d,2} = 4,15$ kN/m.



Kuva 11. Tasaisesti kuormitettu 3-lamellinen CLT-palkki.

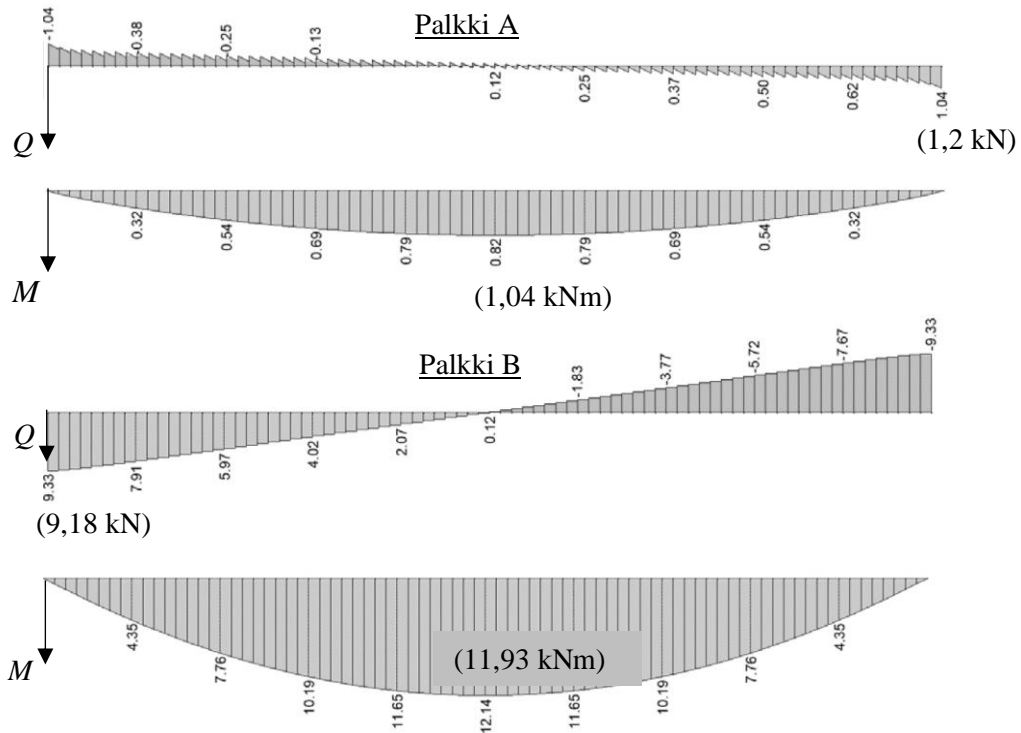
Murtorajatilan kuormituksen aiheuttamat taivutusjännitysjakautumat on määritetty kuvan 11 esimerkkitapaukselle edellä esitetyillä Gamma-menetelmällä, Kreuzingerin menetelmällä sekä kerrosplakkiteorialla. Gamma-menetelmässä saadaan tehtävän lähtöarvoilla yhtälön (33) mukaan liittovaikutusparametrin γ arvoksi 0,947. Tämän jälkeen määritetään poikkileikkauksen teholliset poikkipintasuureet I_{ef} ja S_{ef} , joiden avulla saadaan määritettyä taivutus- ja leikkausjännitykset poikkileikkauksen eri kohdissa kaavojen (38), (40), ja (44) mukaisesti. Käyttörajatilaa vastaava palkin maksimitaipuma on niin ikään suoraviivaista määrittää käyttämällä tehollista neliömomenttia I_{ef} teknisen taivutusteorian tutuissa taipumakaavoissa.

Kreuzingerin menetelmää varten muodostetaan ensin kuvan 9 mukainen FEM-malli, jossa kuvitteelliset palkit A ja B on kytketty toisiinsa nivelpäisillä ideaalisen jäykillä sauvoilla. Esimerkilaskelmissa todettiin, että sauvojen pituudella ei ollut juurikaan vaikutusta tuloksiin, mutta sauvojen välinen etäisyys sen sijaan vaikutti luonnollisesti jonkin verran. Raportoiduissa laskelmissa sauvojen pituudeksi valittiin 260 mm ja sauvojen väliseksi etäisyydeksi 63 mm. Esimerkin lähtöarvoilla palkkien A ja B taivutusjäykkyysien arvoiksi saadaan $(EI)_A = 2EI_1 = 1,23 \cdot 10^{11}$ Nmm² ja $(EI)_B = 2(EAr^2/2) = 1,47 \cdot 10^{12}$ Nmm². Leikkausjäykkyysien arvoiksi saadaan vastaavasti $(GA)_A \rightarrow \infty$ sekä $(GA)_B = br^2 / (1/k_{CLT} + t/2/G_0 + t/2/G_0) = 9,46 \cdot 10^6$ N, jossa jälkimmäisessä lausekkeessa on huomioitu sekä poikkitaikerroksen joustavuus että pitkittäiskerrosten joustavuudet lähteen [4] mukaisesti. Mikäli pitkittäiskerroksia ei huomioida, leikkausjäykkyyden $(GA)_B$ arvo muuttuu 10%, jolla puolestaan ei ole lopputuloksiin juurikaan vaikutusta. Kuvitteellisten palkkien poikkileikkaukset ovat todellisen palkin levyisiä suorakulmioita, joiden korkeuksiksi valitaan edellä määritettyjen taivutusjäykkyyksien perusteella 50,40 mm palkille A ja 115,4 mm palkille B. Kummankin palkin kimmomoduuli E on vastaavasti 11500 MPa. Palkin B liukumoduuliksi G valitaan 82 MPa, jolloin sen leikkausjäykkyys vastaa yllä laskettua arvoa. Rasiusten määrittämisen jälkeen palkin jännitysten määrittäminen tehdään samoin kuin kerrosplakkiteoriassa kaavojen (A.11- A.13) mukaisesti. Kuvassa 12 on esitetty numeerisesti määritetyt palkkien A ja B taivutusmomentti- ja leikkausvoimakuvaajat.

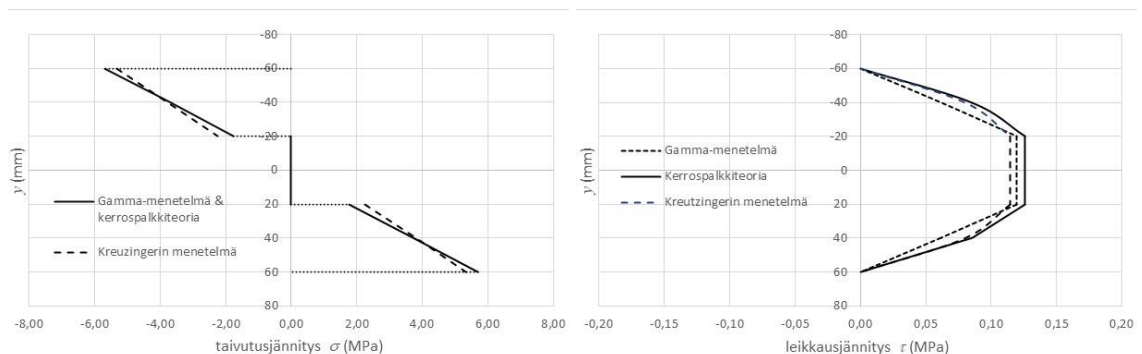
Eri menetelmillä saatuja poikkileikkauksen jännitysten arvoja on havainnollistettu kuvassa 13. Lisäksi Taulukkoon 2 on koottu sekä murtorajatilan jännitystulokset että käyttörajatilan mukaisella kuormituksella lasketut palkin maksimitaipumat.

Taulukko 2. Menetelmien antamien tulosten vertailua. Termi σ_2 on pitkittäislamellin keskellä oleva taivutusjännitys kaavojen (20) ja (38) mukaisesti.

	kerrospalkki- teoria	Kreuzingerin menetelmä	Gamma- menetelmä
σ_{\max} (MPa)	5,68	5,33	5,69
σ_2 (MPa)	3,73	3,79	3,72
τ_{\max} (MPa)	0,115	0,126	0,119
v_{\max} (mm)	16,08	16,30	16,10



Kuva 12. Kreuzingerin menetelmällä määritetyt kuvitteellisten palkkien rasituskuviot. Kuvaan on merkitty myös kerrospalkkiteorian tarkan ratkaisun mukaiset vastaavat arvot sulkulausekkeilla.



Kuva 13. Poikkileikkauksen jännitusjakautumia, a) taivutusjännitys palkin keskellä, b) leikkausjännitys palkin vasemmassa päässä.

Kuten edellä esitetystä tuloksista nähdään, eri menetelmien antamat tulokset ovat hyvin lähellä toisiaan, kuten teoriatarkastelujen perusteella pitääkin. Kerrospalkkiteoriaan perustuvaa ratkaisua voidaan käyttää teoreettisesti tarkkana vertailutuloksena, jolloin voidaan todeta Gamma-menetelmän antavan erittäin hyviä tuloksia. Teorian nojalla nämä erot johtuvat siitä, että palkin taipumamuoto ei noudata sin-funktiota, kuten Gamma-menetelmän johtamisessa oletettiin. Kreuzingerin menetelmän tuloksissa nähtävät erot aiheutuvat sen sijaan pääosin kokonaan numeerisen mallin muodostamisessa tehdyistä valinnoista, esimerkiksi kuvitteelliset palkit A ja B yhdistävien jäykkien nivelsauvojen lukumäärällä on jonkin verran vaikutusta tuloksiin [11]. Lisäksi pitkittäislamellien leikkausmuodonmuutoksen huomioon ottamisella on pieni vaikutus lopputuloksiin. Luonnollisesti Kreuzingerinkin menetelmässä alkuperäisen CLT-palkin tasapainoyhtälöt toteutuvat, ja palkin jokaisessa kohdassa kuvitteellisten palkkien A ja B rasitusten summa vastaa ulkoisista kuormista aiheutuvia rasituksia. Tulosten perusteella voidaan sanoa, että esimerkin kaltaisissa tehtävissä kaikki käytetyt menetelmät johtavat käytännön kannalta riittävän tarkkoihin tuloksiin.

Yhteenveto ja johtopäätökset

Artikkelissa on havainnollistettu lapetaivutettujen CLT-palkkien yleisimpiä lujuus-laskentamenetelmiä yksinkertaisen esimerkkitapauksen avulla. Tähän lähestymistapaan on päädytty, jotta eri menetelmien yhtälöiden rakenne pysyisi mahdollisimman yksinkertaisena. Artikkelissa esitetyn mukaisesti CLT-rakenteiden lujuuslaskennassa yleisesti käytetyt Gamma-menetelmä sekä Kreuzingerin leikkausanalogia ovat hyvin läheistä sukua klassiselle kerrospalkkiteorialle. Artikkelisi sisältää eri menetelmien keskeisimpien termien ja yhtälöiden seikkaperäisen johtamisen lisäksi numeerisen esimerkin, jonka yhteydessä menetelmien yhtäläisyyksiä ja eroja on vertailtu sekä niiden sovellettavuutta käytännön laskentatehtäviin on tarkasteltu eri näkökulmista. Artikkelin liitteessä on esitetty yksityiskohtaisia ohjeita kerrospalkkiteorian hyödyntämiseen niiltä osin, kuin vastaavia ohjeita on alan kirjallisuudesta hankalasti löydettävissä. Tässä artikkelissa on käsitelty CLT-rakenteiden sovelluskohteista vain lapetaivutettua palkkia, mutta myös tason suuntaisesti kuormitettujen CLT-levyjen lujuuslaskennassa käytettävien menetelmien kirjo on niin laaja, että niiden vastaavanlainen seikkaperäinen käsittely olisi hyödyllistä.

Lähteet

- [1] EN 1995-1-1. Eurocode 5: Design of timber structures – Part 1-1: General – Common rules and rules for buildings. *European Committee for Standardization*. CEN, 2014.
- [2] E. Borgström, J. Fröbel (Eds.). *The CLT Handbook, CLT structures – facts and planning*. Swedish Wood, 2019. ISBN 978-91-983214-4-3
- [3] M. Wallner-Novak, J. Koppelhuber, K. Pock. *Brettsperrholz Bemessung – Grundlagen für Statik und Konstruktion nach Eurocode*. proHolzAustria. Vienna, 2013. ISBN 978-3-902320-96-4
- [4] S. Gagnon, C. Pirvu (Eds.). *CLT Handbook: Cross-laminated timber*. Canadian Edition. 2011. ISBN 978-0-86488-547-0

- [5] H. Granholm. Om sammansatta balkar och pelare med särskild hänsyn till spikade träkonstruktioner (On composite beams and columns with particular regard to nailed timber structures). *Transactions of Chalmers University of Technology*, No. 88. Göteborg, 1949.
- [6] K. Möhler. Über das Tragverhalten von Biegeträgern und Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigen Verbindungsmitteln. *Habilitation*: Technische Universität Karlsruhe, Germany, 1956.
- [7] M. Heinisuo, S. Pajunen. 2021. CLT beam analysis using classical elastic theory of layered beams. *Rakenteiden Mekaniikka*, 54(4). <https://doi.org/10.23998/rm.107868>
- [8] M. Heinisuo, S. Pajunen, & A. Aspila. 2023. Ultimate failure load analysis of cross-laminated timber panels subjected to in-plane compression. *Structures*, 47. <https://doi.org/10.1016/j.jcsr.2017.12.006>
- [9] H. Kreuzinger. Platten, Scheiben und Schalen – ein Berechnungsmodell für gängige Statikprogramme. *Bauen mit Holz* 1: 34–39, 1999.
- [10] H.J. Blaß, P. Fellmoser. 2002. Erstellung eines Rechenverfahrens zur Ermittlung von Festigkeitskennwerten von Mehrschichtplatten. *Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine, Abteilung Lehrstuhl für Ingenieurholzbau und Baukonstruktionen. Universität Karlsruhe (TH)*.
- [11] E. Lääveri. 2023. Taivutetun CLT-laatan laskentamenetelmiä. Diplomityö, Tampereen Yliopisto.
- [12] K. Stamm, H. Witte. Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. Springer-Verlag, Wien, New York, 1974.

Sami Pajunen, Markku Heinisuo
 Tampereen yliopisto
 PL 600, 33014 Tampereen yliopisto (Hervannan kampus)
 sami.pajunen@tuni.fi, markku.heinisuo@tuni.fi

Essi Lääveri
 A-insinöörit Suunnittelu Oy
 Puutarhakatu 10, 33210 Tampere
 essi.laaveri@ains.fi

Liite A – Kerrospalkkiteorian soveltaminen CLT-palkeille

Tässä liitteessä esitetään kerrospalkkiteorian soveltamiseen tarvittavat keskeiset yhtälöt lapetaivutetun CLT-palkin tapauksessa muutamassa usein toistuvassa kuormitustilanteessa. Näiden yhtälöiden avulla kerrospalkkiteorian soveltaminen on suoraviivaista, eikä käyttäjän tarvitse erikseen perehtyä teorian yleisempään esitysmuotoon [7].

Kerrospalkkiteoriassa taipuman differentiaaliyhtälö kirjoitetaan muodossa

$$v_{,xxxx} - \frac{bK}{B_0 B_s} (Bv_{,xx} + M) = -\frac{M_{,xx}}{B_0}, \quad (\text{A.1})$$

jossa esiintyvät termit ovat aiemmin kuvatun mukaisesti

$$B_0 = \sum_{i=1}^n E_i I_i, \quad (\text{A.2})$$

$$B_s = \sum_{i=1}^n y_i^2 E_i A_i, \quad (\text{A.3})$$

$$B = B_0 + B_s, \quad (\text{A.4})$$

jossa edelleen $I_i = h_i^3 b / 12$ on pitkittäiskerroksen i neliömometti oman pintakeskiönsä suhteen ja y_i on pitkittäiskerroksen pintakeskiön etäisyys koko poikkileikkauksen pintakeskiöstä. Kaavassa (A.1) olevaan leikkauskertoimeen K on koottu kaikkien liittimien leikkausjäykkyydet muodossa

$$K = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 k_j, \quad (\text{A.5})$$

jossa k_j on liitoskerroksen j leikkausjäykkyys, joka CLT-palkin tapauksessa on

$$k_j = \frac{G_R b}{h_j}, \quad (\text{A.6})$$

ja a_j on kuvan A1 mukaisesti poikkittäiskerroksen j viereisten pitkittäiskerrosten pintakeskiöiden välinen etäisyys:

$$a_j = y_{j+1} - y_j. \quad (\text{A.7})$$

Differentiaaliyhtälön (A.1) ratkaisu saadaan homogeenisen osan yleisen ratkaisun v_0 sekä kuormituksesta riippuvan yksityisratkaisun v_1 summana:

$$v = v_0 + v_1, \quad (\text{A.8})$$

$$v_0(x) = C_1 \cosh \frac{\lambda x}{L} + C_2 \sinh \frac{\lambda x}{L} + C_3 + C_4 x, \quad (\text{A.9})$$

missä

$$\lambda = L \sqrt{\frac{BK}{B_0 B_s}}. \quad (\text{A.10})$$

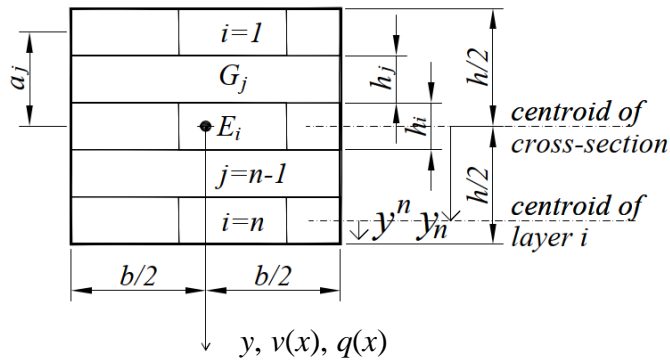
Kaavassa (A.9) esiintyvät tuntemattomat termit saadaan ratkaistua reunaehdoista, ja esimerkiksi tasaisen kuormituksen tapauksessa yksityisratkaisu v_1 on

$$v_1(x) = -\frac{qL^2}{2B\lambda^2} \frac{B_s}{B_0} x^2 - \frac{qL}{12B} x^3 + \frac{q}{24B} x^4. \quad (\text{A.11})$$

Taivutuksesta aiheutuvat normaalijännitykset eri pitkittäiskerroksissa määritetään yhtälöllä

$$\sigma_i = \frac{E_i y^i}{B_0} M_0 + \frac{y_i E_i}{B_s} M_s, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.12})$$

jossa kuvan A1 mukaisesti koordinaatin y^j origo on pitkittäiskerroksen i keskellä, ja koordinaatin y_i origo on koko poikkileikkauksen pintakeskiössä. Vastaavasti termi M_0 kuvaa sitä taivutusmomentin osaa, joka otetaan vastaan pitkittäiskerroksien lokaalina taivutuksena, ja M_s sitä taivutusmomentin osaa, joka otetaan vastaan pitkittäiskerroksien aksiaalisten voimaparien momenttina.



Kuva A1. CLT-poikkileikkauksessa käytetyt merkinnät

Leikkausjännitykset määritetään erikseen pitkittäis- ja poikittaiskerroksille. Poikittaiskerroksessa j oleva vakio leikkausjännitys saadaan kaavasta

$$\tau_j = \frac{k_j a_j}{b_j} \gamma = \frac{k_j a_j Q_s}{b_j K}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (\text{A.13})$$

kun taas pitkittäiskerroksessa i leikkausjännitys muuttuu parabolisesti, ja saa lokaalin ääriarvonsa kerroksen keskellä:

$$\tau_{i,max} = \frac{1.5Q_i}{A_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (\text{A.14})$$

jossa Q_i on pitkittäiskerroksen i osuus kaikkien pitkittäiskerroksien kantamasta leikkausvoimasta Q_0 .

Yllä esitetyissä kaavoissa (A.12) – (A.14) esiintyvien termien Q_i , Q_s , M_0 , M_s , ja γ lausekkeet on esitetty yleisessä muodossa lähteessä [7]. Huomattavaa on, että aiemmin

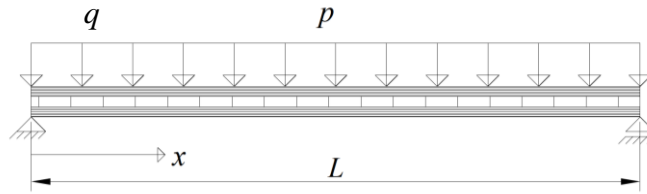
esitellyssä Kreuzingerin menetelmässä kuvitteellisen palkin A rasitukset vastaavat termejä Q_0 sekä M_0 , kun taas kuvitteellisen palkin rasitukset vastaavat termejä Q_s ja M_s . Kerrosalkiteorian mukaiset tarkat lausekkeet on esitetty alla muutamalle usein toistuvalla kuormitustapaukselle. Esitetyissä kaavoissa käytetään seuraavia lyhenteitä:

$$\alpha_i = \frac{B_i}{B_s}, \quad (\text{A.15})$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i = \frac{B_0}{B_s}, \quad (\text{A.16})$$

$$\beta = \frac{B_s}{bKL^2}. \quad (\text{A.17})$$

Tasainen kuormitus



Kuva A2. Yksiaukkoinen palkki sekä tasainen kuormitus

Tapauksessa, jossa palkin päissä kerrosten välinen liukuma pääsee vapaasti tapahtumaan, lausekkeet ovat lähteen [12] mukaan

$$v(\xi) = \frac{qL^4}{B} \left[\frac{1}{24} \xi(1 - 2\xi^2 + \xi^3) + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \xi(1 - \xi) - \frac{1}{\alpha\lambda^4} \frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}) - \cosh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\cosh(\frac{\lambda}{2})} \right], \quad (\text{A.18})$$

$$M_s(\xi) = qL^2 \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}) - \cosh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\cosh(\frac{\lambda}{2})} \right) \right], \quad (\text{A.19})$$

$$M_0(\xi) = qL^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) + \frac{1}{\alpha\lambda^2} \left(\frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}) - \cosh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\cosh(\frac{\lambda}{2})} \right) \right], \quad (\text{A.20})$$

$$\gamma(\xi) = \frac{Q_s(\xi)}{K} = \frac{qL}{K(1+\alpha)} \left[\frac{1}{2} (1 - 2\xi) - \frac{1}{\lambda} \frac{\sinh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\cosh(\frac{\lambda}{2})} \right], \quad (\text{A.21})$$

$$Q_i(\xi) = qL \frac{\alpha_i}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1 - 2\xi) + \frac{1}{\alpha\lambda} \frac{\sinh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\cosh(\frac{\lambda}{2})} \right]. \quad (\text{A.22})$$

Mikäli taas palkin päiden tuennat ovat sellaiset, jotka estävät kerrosten välisen suhteellisen siirtymän, lausekkeet ovat:

$$v(\xi) = \frac{qL^4}{B} \left[\frac{1}{24} \xi(1 - 2\xi^2 + \xi^3) + \frac{1}{2\alpha\lambda^2} \xi(1 - \xi) - \frac{1}{2\alpha\lambda^3} \frac{\cosh(\frac{\lambda}{2}) - \cosh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{\sinh(\frac{\lambda}{2})} \right], \quad (\text{A.23})$$

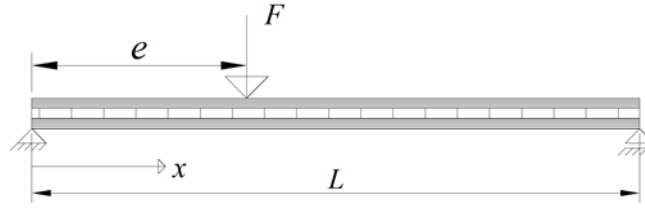
$$M_s(\xi) = qL^2 \frac{1}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1 - \xi) + \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\cosh(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2})}{2 \sinh(\frac{\lambda}{2})} - \frac{1}{\lambda} \right) \right], \quad (\text{A.24})$$

$$M_0(\xi) = qL^2 \frac{\alpha}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} \xi(1-\xi) - \frac{1}{\alpha\lambda} \left(\frac{\cosh\left(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} - \frac{1}{\lambda} \right) \right], \quad (\text{A.25})$$

$$\gamma(\xi) = \frac{Q_s(\xi)}{K} = \frac{qL}{K(1+\alpha)} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) - \frac{\sinh\left(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right], \quad (\text{A.26})$$

$$Q_i(\xi) = qL \frac{\alpha_i}{1+\alpha} \left[\frac{1}{2} (1-2\xi) + \frac{1}{\alpha} \frac{\sinh\left(\frac{\lambda(1-2\xi)}{2}\right)}{2 \sinh\left(\frac{\lambda}{2}\right)} \right]. \quad (\text{A.27})$$

Pistekuorma palkilla



Kuva A3. Yksiaukkoinen palkki ja pistevoima

Pistevoima vaikuttaa kuvan A3 mukaisesti kohdassa $x = e$ (dimensiottomassa muodossa kohdassa $\varepsilon = e/L$). Tarkastellaan tapausta, jossa kerrosten välinen suhteellinen siirtymä pääsee palkin tuilla vapaasti tapahtumaan. Tällöin taipuman lausekkeet ovat:

$$v_1(\xi) = \frac{FL^3}{B} \left[\frac{1}{6} (1-\varepsilon)\xi(2\varepsilon - \varepsilon^2 - \xi^2) + \frac{1}{\alpha\lambda^2} (1-\varepsilon)\xi - \frac{1}{\alpha\lambda^3} \frac{\sinh\lambda(1-\varepsilon)}{\sinh\lambda} \sinh\lambda\xi \right], \quad (\text{A.28})$$

$$v_2(\xi) = \frac{FL^3}{B} \left[\frac{1}{6} \varepsilon(1-\xi)(-\varepsilon^2 + 2\xi - \xi^2) + \frac{1}{\alpha\lambda^2} \varepsilon(1-\xi) - \frac{1}{\alpha\lambda^3} \frac{\sinh\lambda\varepsilon}{\sinh\lambda} \sinh\lambda(1-\xi) \right], \quad (\text{A.29})$$

jossa alaindeksi 1 viittaa palkin vasempaan osaan $0 \leq \xi \leq \varepsilon$ ja alaindeksi 2 puolestaan pistevoiman oikealla puolella olevaan osaan $\varepsilon \leq \xi \leq 1$. Muut tarvittavat lausekkeet ovat:

$$M_{s,1} = \frac{FL}{1+\alpha} \left[(1-\varepsilon)\xi - \frac{\sinh\lambda(1-\varepsilon)}{\lambda\sinh\lambda} \sinh\lambda\xi \right], \quad (\text{A.30})$$

$$M_{s,2} = \frac{FL}{1+\alpha} \left[\varepsilon(1-\xi) - \frac{\sinh\lambda\varepsilon}{\lambda\sinh\lambda} \sinh\lambda(1-\xi) \right], \quad (\text{A.31})$$

$$M_{0,1} = \frac{FL\alpha}{1+\alpha} \left[(1-\varepsilon)\xi + \frac{\sinh\lambda(1-\varepsilon)}{\alpha\lambda\sinh\lambda} \sinh\lambda\xi \right], \quad (\text{A.32})$$

$$M_{0,2} = \frac{FL\alpha}{1+\alpha} \left[\varepsilon(1-\xi) + \frac{\sinh\lambda\varepsilon}{\alpha\lambda\sinh\lambda} \sinh\lambda(1-\xi) \right], \quad (\text{A.33})$$

$$\gamma_1 = \frac{Q_{s1}(\xi)}{K} = \frac{F}{K(1+\alpha)} \left[1 - \varepsilon - \frac{\sinh\lambda(1-\varepsilon)}{\sinh\lambda} \cosh\lambda\xi \right], \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma_2 = \frac{Q_{s2}(\xi)}{K} = \frac{F}{K(1+\alpha)} \left[-\varepsilon + \frac{\sinh\lambda\varepsilon}{\sinh\lambda} \cosh\lambda(1-\xi) \right], \quad (\text{A.35})$$

$$Q_{i1} = \frac{F\alpha_i}{1+\alpha} \left[1 - \epsilon + \frac{\sinh\lambda(1-\epsilon)}{\alpha\sinh\lambda} \cosh\lambda\xi \right], \quad (\text{A.36})$$

$$Q_{i2} = \frac{F\alpha_i}{1+\alpha} \left[-\epsilon - \frac{\sinh\lambda\epsilon}{\alpha\sinh\lambda} \cosh\lambda(1-\xi) \right]. \quad (\text{A.37})$$