

## Poikittaisisotrooppinen lineaarikimmoinen materiaolimalli

Kari Kolari ja Reijo Kouhia<sup>1</sup>

**Tiivistelmä.** Artikkelissa johdetaan lineaarisesti kimmoisan poikittaisisotrooppisen materiaolimallin konstitutiivinen yhtälö invarianttiteorian avulla koordinaatistoriippumattomassa muodossa. Poikittaisisotrooppisen kimmoisan aineen jännitysenergia tai vastaavasti muodonmuutosenergia riippuu viidestä invariantista, kolmesta jännitystensorin invariantista ja kahdesta jännityksen ja rakennetensorin tulon invariantista, tai muodonmuutosenergian tapauksessa kolmesta venymätensorin invariantista ja kahdesta venymän ja rakennetensorin tulon invariantista.

*Avainsanat:* lineaarikimmoinen materiaolimalli, poikittaisisotropia, invariantit, muodonmuutosenergia, jännitysenergia

*Vastaanotettu:* 29.3.2022. *Hyväksytty:* 3.5.2022. *Julkaistu verkossa:* 23.5.2022.

### Johdanto

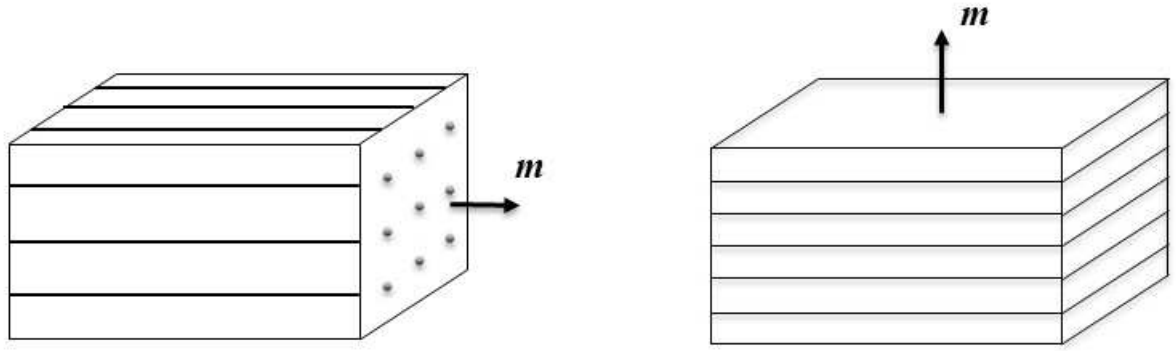
Materiaalin symmetriaominaisuudella tarkoitetaan materiaalin tietyn pisteen ominaisuuksien vaihtelua suunnan suhteen [5, Sivut 75]. Mikäli ominaisuudet ovat suunnasta riippumattomia kutsutaan materiaalia isotrooppiseksi, muussa tapauksessa anisotrooppiseksi. Lineaarisesti kimmoisalla materiaalilla on kahdeksan mahdollista symmetriaryhmää [4, 5, 6, 8]. Yksi näistä ryhmistä on poikittaisisotrooppinen eli transversaali-isotrooppinen, jossa ominaisuudet ovat isotrooppisia vain yhden tason suhteen. Isotropiataso voidaan määrittää, kun tunnetaan sen yksikkönormaalivektori  $m$ . Poikittaisisotrooppisia aineita ovat esimerkiksi yhteen suuntaan kuituvahvistetut komposiittimateriaalit, kerrokselliset maalajit, jää [10], kuva 1. Taottujen metallien väsymisominaisuudet ovat poikittaisisotrooppisia vaikka kimmoiset ominaisuudet olisivatkin lähes isotrooppisia [7].

Tässä artikkelissa johdetaan lineaarisesti kimmoisan poikittaisisotrooppisen aineen sekä joustomuotoinen, että jäykkyyssuotoinen konstitutiivinen yhtälö yleisessä koordinaatistoriippumattomassa muodossa käyttäen tensoriarvoisten skalaarifunktioiden invarianttiteoriaa [2, 12, 16, 17, 18, 19], katso myös [13, Luku 4].

### Poikittaisisotrooppinen lineaarikimmoinen materiaolimalli

Materiaali on poikittaisisotrooppista, eli transversaali isotrooppista, mikäli sen ominaisuudet ovat isotrooppisia tietyssä tasossa ja poikkeavat niistä tätä tasoa vastaan kohti-

<sup>1</sup>Vastuullinen kirjoittaja. [reijo.kouhia@tuni.fi](mailto:reijo.kouhia@tuni.fi)



Kuva 1. Esimerkkejä poikittaisisotrooppisista aineista: yhteen suuntaan kuituvahvistettu ja kerroksellinen rakenne.

suorassa suunnassa. Poikittaisisotrooppisella aineella on siten symmetriaominaisuus, joka kuvataan symmetriaryhmän[13]

$$\mathcal{G}_1 = \{ \mathbf{Q} \in \mathcal{O}(V), \mathbf{Q}\mathbf{m} = \mathbf{m} \}, \quad (1)$$

avulla, jossa  $\mathcal{O}(V)$  on kolmidimensioisen euklidisen vektoriavaruuden  $V$  ortogonaaliryhmä. Poikittaisisotrooppinen ryhmä  $\mathcal{G}_1$  sisältää siten kierrot  $\mathbf{Q}$ , jotka säilyttävät kuvauksessa suunnan  $\mathbf{m}$ .

Materiaalia, jolla on olemassa kimmoinen potentiaali, sanotaan Greenin kimmoisaksi tai hyperkimmoisaksi materiaaliksi. Tarkastellaan ensin hyperkimmoiden konstitutiivisen yhteyden muodostamista lähtien komplementaarisesta muodonmuutosenergiatiheydestä, eli jännitysenergiatiheydestä  $W^c$ :

$$W^c = W^c(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{M}) = W^c(\mathbf{Q}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{Q}^T, \mathbf{Q}\mathbf{M}\mathbf{Q}^T), \quad (2)$$

jossa  $\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}$  on rakennetensori,  $\mathbf{m}$  on isotropiatason yksikkövektori ja  $\mathbf{Q}$  on poikittaisisotrooppiseen symmetriaryhmään  $\mathcal{G}_1$  kuuluva ortogonaalinen tensori. Poikittaisisotrooppisen kimmoiden aineen **esityslause** ilmaisee jännitysenergian riippuvuuden viidestä jännityksen  $\boldsymbol{\sigma}$  ja rakennetensorin  $\mathbf{M}$  invariantista [2, 13, 14]

$$W^c = W^c(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5), \quad (3)$$

jossa invariantit  $I_i$  ovat

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2), \quad I_3 = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^3), \quad I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}), \quad I_5 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}). \quad (4)$$

Invariantit  $I_4$  ja  $I_5$  voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M}) = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{m}, \quad I_5 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{M}) = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{m}. \quad (5)$$

Yleisin mahdollinen kimmoinen poikittaisisotrooppinen joustomuotoinen konstitutiivinen yhtälö venymälle  $\boldsymbol{\varepsilon}$  saadaan derivoimalla jännitysenergia (3) jännityksen suhteen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial W^c}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial W^c}{\partial I_1} \mathbf{I} + \frac{\partial W^c}{\partial I_2} \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial W^c}{\partial I_3} \boldsymbol{\sigma}^2 + \frac{\partial W^c}{\partial I_4} \mathbf{M} + \frac{\partial W^c}{\partial I_5} (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{M} + \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma}). \quad (6)$$

Rajoituttaessa lineaariseen malliin, on derivaattojen  $\partial W^c/\partial I_i$  toteutettava

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_1} = b_1 I_1 + b I_4, \quad (7)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_2} = b_2, \quad (8)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_3} = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_4} = b_3 I_1 + b_4 I_4, \quad (10)$$

$$\frac{\partial W^c}{\partial I_5} = b_5, \quad (11)$$

koska kaikkien termien on yhtälössä (6) oltava jännityksen  $\boldsymbol{\sigma}$  suhteen lineaarisia. Identiteetistä

$$\frac{\partial^2 W^c}{\partial I_i \partial I_j} = \frac{\partial^2 W^c}{\partial I_j \partial I_i}, \quad (12)$$

saadaan

$$\frac{\partial}{\partial I_4} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} \right) = \frac{\partial}{\partial I_1} \left( \frac{\partial W}{\partial I_4} \right), \quad \text{joten} \quad b = b_3. \quad (13)$$

Lineaarikimmoisalla poikittaisisotrooppisella materiaalilla on siten viisi materiaaliparametria ja sen konstitutiivinen yhtälö voidaan kirjoittaa yleisessä koordinaatistosta riippumattomassa muodossa

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (b_1 \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + b_3 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M})) \mathbf{I} + b_2 \boldsymbol{\sigma} + (b_3 \text{tr } \boldsymbol{\sigma} + b_4 \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M})) \mathbf{M} + b_5 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}). \quad (14)$$

Epälineaarisesti kimmoisan poikittaisisotrooppisen aineen hyperelastisia malleja on esitetty mm. lähteissä [9, 15].

## Materiaaliparametrit

Johdetaan seuraavaksi materiaaliparametrien  $b_1, \dots, b_5$  lausekkeet ilmaistuna fysikaalisesti mielekkäiden kimmovakioiden avulla [11]. Tätä varten tarkastellaan erikoistapausta, jossa isotropiataso yhtyy  $x_2, x_3$ -tasoon, eli pitkittäissuunnan yksikkövektori  $\mathbf{m}$  on  $x_1$ -akselin suuntainen, eli  $\mathbf{m} = \mathbf{e}_1$ . Fysikaalisesti järkevät materiaaliparametrit ovat isotropiatason kimmokerroin  $E_T$  ja Poissonin vakio  $\nu_T$  sekä pitkittäissuunnan  $x_1$  kimmokerroin  $E_L$ , Poissonin vakio  $x_1, x_3$ - ja  $x_1, x_2$  tasoissa,  $\nu_L$  sekä leikkauskerroin  $G_L = G_{12} = G_{13}$ . Pitkittäissuuntaan liittyvät parametrit  $E_L, G_L$  ja  $\nu_L$  ovat toisistaan riippumattomia.

Lausutaan kertoimet  $b_1, \dots, b_5$  fysikaalisesti mielekkäiden materiaalivakioiden  $E_L, G_L, \nu_L, E_T$  ja  $\nu_T$  avulla. Kirjoitetaan nyt yleinen yhtälö (14) Voigtin merkintätavalla. Voigtin merkintätavassa jännitys- ja venymätensorit kirjoitetaan pystymatriiseina ja käytetään seuraavaa järjestystä jännitys- ja venymäkomponenteille

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12})^T, \quad \text{ja} \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12})^T. \quad (15)$$

Koska pitkittäissuunnan yksikkövektori on nyt pystymatriisina  $\mathbf{m} = (1, 0, 0)^T$ , saadaan

matriisiesitykset<sup>2</sup>

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

sekä

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}) = \sigma_{11}. \quad (17)$$

Täten

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} = [b_1(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + b_3\sigma_{11}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{13} & \tau_{23} & \sigma_{33} \end{pmatrix} + [b_3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) + b_4\sigma_{11}] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b_5 \begin{pmatrix} 2\sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{12} & 0 & 0 \\ \tau_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Kootaan tulokset yhteen ja otetaan huomioon että Voigtin merkintätavasa leikkausmuodonmuutokset esitetään liukukulman  $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$  avulla, saadaan viimein joustomuotoinen konstitutiivinen yhtälö

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad (19)$$

jossa materiaalin komplianssi- eli joustomatriisi on

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} b_1 + b_2 + b_4 + 2(b_3 + b_5) & b_1 + b_3 & b_1 + b_3 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 + b_3 & b_1 + b_2 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 + b_3 & b_1 & b_1 + b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(b_2 + b_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(b_2 + b_5) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Edellä esitetystä muodosta havaitaan heti, että isotropiatason leikkauskertoimen  $G_T = G_{23}$  ja  $b_2$ :n relaatio on

$$\tau_{23} = G_T \gamma_{23}, \quad \text{joten} \quad b_2 = \frac{1}{2G_T} = \frac{1 + \nu_T}{E_T}. \quad (21)$$

Poissonin vakio isotropiatasossa  $\nu_T$  on venymien  $\varepsilon_{22}$  ja  $\varepsilon_{33}$  välinen suhde yksi akselisen normaali jännityksen vaikuttaessa  $x_3$ -akselin suunnassa, joten

$$\varepsilon_{22} = -\nu_T \varepsilon_{33}. \quad (22)$$

Tästä seuraa

$$\varepsilon_{22} = b_1 \sigma_{33} = b_1 E_T \varepsilon_{33} = -b_1 E_T \varepsilon_{22} / \nu_T, \quad (23)$$

josta saadaan

$$b_1 = -\frac{\nu_T}{E_T}. \quad (24)$$

<sup>2</sup>Koska operoimme karteesisessä koordinaatistojärjestelmässä, selkeyden vuoksi emme tee eroa tensori- ja matriisiesityksen merkintätapojen välillä.

Tarkistuksena on hyvä havaita, että

$$\varepsilon_{22} = (b_1 + b_2)\sigma_{22} = \frac{1}{E_T}\sigma_{22}. \quad (25)$$

Kerroin  $b_5$  saadaan ratkaistua tason  $(x_1, x_2)$  tai  $(x_1, x_3)$  leikkauskertoimen avulla:

$$b_2 + b_5 = \frac{1}{2G_L}, \quad \text{josta saadaan} \quad b_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_L} - \frac{1}{G_T} \right). \quad (26)$$

Vakio  $b_3$  voidaan määrittää laskemalla venymä  $x_2$ -akselin suunnassa kun normaali-jännitys vaikuttaa pitkittäissuuntaan  $x_1$ . Poissonin vakio  $\nu_L$  määritellään seuraavasti, kun ainoastaan  $\sigma_{11} \neq 0$  on nollasta poikkeava

$$\varepsilon_{22} = -\nu_T\varepsilon_{11}, \quad \text{tai} \quad \varepsilon_{33} = -\nu_T\varepsilon_{11}. \quad (27)$$

Koska  $\sigma_{11} = E_L\varepsilon_{11}$  saadaan

$$\varepsilon_{22} = (b_1 + b_3)\sigma_{11} = (b_1 + b_3)E_L\varepsilon_{11} \quad (28)$$

josta seuraa

$$\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = -\nu_L = (b_1 + b_3)E_L, \quad (29)$$

ja viimein saadaan  $b_3$ :n lausekkeeksi

$$b_3 = -\frac{\nu_L}{E_L} - b_1 = \frac{\nu_T}{E_T} - \frac{\nu_L}{E_L}. \quad (30)$$

Viimeinen kerroin  $b_4$  voidaan ratkaista yhtälöstä

$$\varepsilon_{11} = (b_1 + b_2 + b_4 + 2(b_3 + b_5))\sigma_{11} = \frac{1}{E_L}\sigma_{11} \quad (31)$$

josta saadaan

$$b_4 = \frac{1}{E_L} - b_1 - b_2 - 2(b_3 + b_5) = \frac{1 + 2\nu_L}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_L}. \quad (32)$$

Yhteenvedona yleisen lineaarikimmoisen poikittaisisotroopisen materiaalin (14) kertoimet  $b_i$  ovat:

$$b_1 = -\frac{\nu_T}{E_T}, \quad (33)$$

$$b_2 = \frac{1 + \nu_T}{E_T}, \quad (34)$$

$$b_3 = \frac{\nu_T}{E_T} - \frac{\nu_L}{E_L}, \quad (35)$$

$$b_4 = \frac{1 + 2\nu_L}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_L}, \quad (36)$$

$$b_5 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_L} - \frac{1}{G_T} \right). \quad (37)$$

Joustomatriisi  $D$  voidaan kirjoittaa erikoistapauksessa, jossa isotropiataso on  $(x_2, x_3)$ -taso, muodossa

$$D = \begin{pmatrix} 1/E_L & -\nu_L/E_L & -\nu_L/E_L & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_L/E_L & 1/E_T & -\nu_T/E_T & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_L/E_L & -\nu_T/E_T & 1/E_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_L \end{pmatrix}. \quad (38)$$

Edellä olevasta muodosta nähdään, että joustomatriisi redusoituu lineaarikimmoisan isotrooppisen mallin joustomatriisiin, kun  $\nu = \nu_T = \nu_L$ ,  $E = E_T = E_L$  ja  $G = G_L = G_T = E/2(1 + \nu)$ . Tämä voidaan myös todeta kaavoista (33)-(37), jotka redusoituvat isotrooppisessa tapauksessa muotoon  $b_1 = -\nu/E$ ,  $b_2 = 1/2G$ ,  $b_3 = b_4 = b_5 = 0$ .

Joustomatriisi (38) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{12} & D_{23} & D_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(D_{22} - D_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}, \quad (39)$$

jossa

$$D_{11} = \frac{1}{E_L}, \quad D_{22} = \frac{1}{E_T}, \quad D_{12} = -\frac{\nu_L}{E_L}, \quad D_{23} = -\frac{\nu_T}{E_T}, \quad D_{44} = \frac{1}{G_L}, \quad (40)$$

ja

$$2(D_{22} - D_{23}) = \frac{2(1 + \nu_T)}{E_T} = \frac{1}{G_T}. \quad (41)$$

## Materiaaliparametrien määrittäminen

Linearisesti kimmoisan poikittaisisotrooppisen aineen materiaali-parametrit voidaan määrittää seuraavien kolmen/neljän kokeen perusteella, jossa pitkittäisakselin on oletettu olevan  $x_1$ -akselin suuntainen.

1. Kuormitetaan koekappaletta yksiakselisella jännityksellä pitkittäissuunnassa 1, eli  $\sigma_{11} \neq 0$ , ja mitataan venymät  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$ , tällöin  $E_1 = E_L = \sigma_{11}/\varepsilon_{11}$  ja  $\nu_L = -\varepsilon_{22}/\varepsilon_{11}$ .
2. Kuormitetaan koekappaletta 1-akselisella jännityksellä isotropiatasossa, esim.  $\sigma_{22}$ , ja mitataan venymät kolmessa kohtisuorassa suunnassa  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}$  ja  $\varepsilon_{33}$ , tällöin  $E_2 = E_T = \sigma_{22}/\varepsilon_{22}$ ,  $\nu_T = -\varepsilon_{33}/\varepsilon_{22}$ .
3. Leikkauskerroin  $G_L$  voidaan määrittää leikkauskokeella 1-2 tasossa, tällöin  $G_L = \tau_{12}/\gamma_{12}$ .
4. Isotropiatason leikkauskerroin  $G_T$  voidaan määrittää leikkauskokeella 2-3 tasossa  $G_T = \tau_{23}/\gamma_{23}$ . Tämä saadaan myös kokeen 2 tuloksena, joten tämä testi ei ole välttämätön.

## Thermodynaamiset rajoitteet

Jotta venymä- tai jännitysenergia olisi positiivinen kaikilla venymien arvoilla, on materiaalin kimmoisen komplianssimatriisin, ja siten myös materiaalin kimmoisen jäykkyyismatriisin oltava positiivisesti definiitti. Välttämätön ja riittävä ehto matriisin positiividefiniittiydelle on, että kaikki sen pääalideterminantit ovat positiivisia, josta seuraa ehdot:

$$\begin{aligned} D_{11} > 0 &\Rightarrow E_L > 0, & D_{22} > 0 &\Rightarrow E_T > 0, \\ 2(D_{22} - D_{23}) > 0 &\Rightarrow G_T > 0, & D_{44} > 0 &\Rightarrow G_L > 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{vmatrix} > 0 &\Rightarrow D_{11}D_{22} - D_{12}^2 > 0 \Rightarrow 1 - \frac{E_T}{E_L}\nu_L^2 > 0 \\ &\Rightarrow -\sqrt{E_L/E_T} < \nu_L < \sqrt{E_L/E_T}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D_{22} & D_{23} \\ D_{23} & D_{22} \end{vmatrix} > 0 &\Rightarrow D_{22}^2 - D_{23}^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{E_T^2} - \frac{\nu_T^2}{E_T^2} > 0 \\ &\Rightarrow 1 - \nu_T^2 > 0 \Rightarrow -1 < \nu_T < 1, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} & D_{23} \\ D_{12} & D_{23} & D_{22} \end{vmatrix} > 0 &\Rightarrow (1 - \nu_T^2)E_L - 2E_T\nu_L^2(1 + \nu_T) > 0 \\ &\Rightarrow -\sqrt{\frac{E_L(1 - \nu_T)}{2E_T}} < \nu_L < \sqrt{\frac{E_L(1 - \nu_T)}{2E_T}}. \end{aligned} \quad (45)$$

Havaitaan, että rajoitteesta (44) johtuen epäyhtälö (45) on rajoittavampi kuin (43). Lineaarisen poikittaisisotrooppisen materiaalimallin parametrien termodynaamiset rajoitteet ovat siten

$$E_L > 0, \quad E_T > 0, \quad G_L > 0, \quad (46)$$

$$-1 < \nu_T < 1, \quad (47)$$

$$-\sqrt{\frac{E_L(1 - \nu_T)}{2E_T}} < \nu_L < \sqrt{\frac{E_L(1 - \nu_T)}{2E_T}}. \quad (48)$$

## Monotonisuusehdot

Termodynaamiset rajoitteet ovat pakottavia. Mikäli oletetaan että kimmokerroimen ääriarvot saavutetaan pitkittäissuunnassa ja isotropiatasossa seuraa siitä lisärajoitteita. Toisin sanoen kimmokerroin mielivaltaisessa suunnassa pitkittäissuuntaan nähden vaihtelee monotonisesti siirryttäessä pitkittäissuunnasta isotropiatasolle<sup>3</sup>, katso esim. [1, 3, 11]. Tarkastellaan tätä ajatellen, että yksiakselinen jännitys vaikuttaa  $x_1$ -akselin suunnassa ja että pitkittäissuunnan yksikkövektori  $\mathbf{m}$  muodostaa kulman  $\alpha$   $x_1$ -akselin kanssa. Tällöin  $\mathbf{m} = (\cos \alpha, \sin \alpha, 0)^T$  ja käytetään nyt lyhennysmerkintöjä  $c = \cos \alpha$  ja  $s = \sin \alpha$ , jolloin saadaan

$$\mathbf{M} = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m} = \begin{pmatrix} c^2 & sc & 0 \\ sc & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 2c^2\sigma_{11} & sc\sigma_{11} & 0 \\ sc\sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

<sup>3</sup>Tämä on helppo kuvitella esimerkiksi yhteen suuntaan kuituvahvistetulle materiaalille, jossa kuidun suunta edustaa maksimijäykkyyttä ja sitä vastaan kohtisuora suunta minimijäykkyyttä.

ja

$$I_1 = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} = \sigma_{11} \quad I_4 = \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M}) = c^2 \sigma_{11}. \quad (50)$$

Venymätensori on nyt

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (b_1 \sigma_{11} + b_3 c^2 \sigma_{11}) \mathbf{I} + b_2 \boldsymbol{\sigma} + (b_3 \sigma_{11} + b_4 c^2 \sigma_{11}) \mathbf{M} + b_5 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}), \quad (51)$$

ja venymä  $x_1$ -akselin suunnassa on

$$\varepsilon_{11} = (b_1 + b_2 + 2(b_3 + b_5)c^2 + b_4 c^4) \sigma_{11}, \quad (52)$$

joka jäykkyyssuunnassa kirjoitettuna on

$$\sigma_{11} = \frac{1}{b_1 + b_2 + 2(b_3 + b_5)c^2 + b_4 c^4} \varepsilon_{11}. \quad (53)$$

Kimmokerroin  $\alpha$ -suunnassa on siten

$$E(\alpha) = \frac{1}{b_1 + b_2 + 2(b_3 + b_5) \cos^2 \alpha + b_4 \cos^4 \alpha}. \quad (54)$$

Tarkastellaan nyt onko nimittäjällä  $f(x) = b_1 + b_2 + 2(b_3 + b_5)x + b_4 x^2$  ääriarvoja välillä  $0 < x < 1$ . Funktiolla  $f$  on derivaatan nollakohta arvolla  $x = \xi^2 = -(b_3 + b_5)/b_4$ . Jotta  $f$  olisi monotoninen välillä  $0 \leq x \leq 1$ , lausekkeiden  $b_3 + b_5$  ja  $b_4$  on oltava samanmerkkisiä jolloin  $f$ :llä ei ole ääriarvoja kyseisellä välillä.

Yhtälöissä (33)-(37) vakiot  $b_1, \dots, b_5$  on annettu kimmovakioiden  $E_L, E_T, G_L, \nu_L$  ja  $\nu_T$  avulla. Oletetaan nyt  $E_L > E_T$ . Tarkastellaan yhtälöä

$$\xi^2 = -\frac{b_3 + b_5}{b_4}, \quad (55)$$

jotta  $\xi$ :lle ei olisi reaalista ratkaisua välillä  $[0, 1]$ , on oltava

$$-\frac{b_3 + b_5}{b_4} > 1, \quad \text{tai} \quad -\frac{b_3 + b_5}{b_4} < 0. \quad (56)$$

Tarkastellaan ensin ehtoa  $-(b_3 + b_5)/b_4 > 1$ , josta olettaen että  $b_4 > 0$ , saadaan ehto

$$-(b_3 + b_5) > b_4 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\nu_T}{E_T} + \frac{\nu_L}{E_L} + \frac{1}{2G_T} - \frac{1}{2G_L} > \frac{1 + 2\nu_L}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_L}, \quad (57)$$

joka muutaman välivaiheen jälkeen voidaan kirjoittaa muodossa

$$G_L < \frac{E_L}{2(1 + \nu_L)}. \quad (58)$$

Tapaus  $b_3 + b_5 < 0$  puolestaan johtaa ehtoon

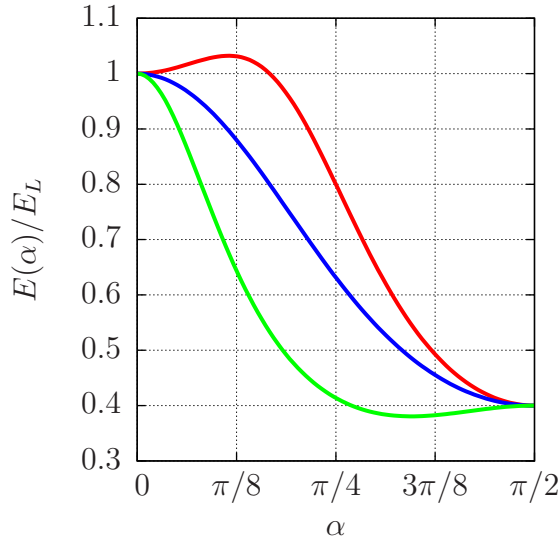
$$G_L > \frac{E_L}{2(\nu_L + E_L/E_T)}. \quad (59)$$

Tarkastellaan esimerkinomaisesti tapausta  $E_T/E_L = 2/5 = 0,4$  ja  $\nu_L = \nu_T = 1/4 = 0,25$ . Nämä arvot johtavat seuraaviin ehtoihin pitkittäissuunnan liukukertoimelle  $G_L$ :

$$\frac{G_L}{E_L} < \frac{1}{2(1 + \nu_L)} = \frac{2}{5} = 0,4 \quad \text{ja} \quad \frac{G_L}{E_L} > \frac{1}{2(\nu_L + E_L/E_T)} = \frac{2}{11} \approx 0,182. \quad (60)$$

Kuvassa 2 on esittety tapaukset  $G_L/E_L = 0,5$  (ylin viiva),  $G_L/E_L = 0,3$  (keskimmäinen) ja  $G_L/E_L = 0,15$  (alin).





Kuva 2. Kimmokerroin eri suunnissa suhteessa pitkittäissuuntaan, ylin punainen viiva  $G_L/E_L = 0,5$ , keskimäinen sininen viiva  $G_L/E_L = 0,3$  ja alin vihreä viiva  $G_L/E_L = 0,15$ ,  $\nu_L = \nu_T = 0,25$ ,  $E_T/E_L = 0,4$ .

### Jäykkyysmuotoinen konstitutiivinen yhtälö

Aivan vastaavasti kuin joustomuotoinen yhtälö (14) voidaan muodonmuutosenergiasta lähtien johtaa jäykkyysmuotoinen konstitutiivinen yhtälö

$$\boldsymbol{\sigma} = (a_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + a_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})) \mathbf{I} + a_2 \boldsymbol{\varepsilon} + (a_3 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})) \mathbf{M} + a_5 (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (61)$$

joka Voigtin esitystavalla voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}. \quad (62)$$

Kuten joustomuotoisen esityksen tapauksessa, oletetaan nyt pitkittäissuunnan olevan  $x_1$ -akselin suuntainen, jolloin materiaalin jäykkyysmatriisi  $\mathbf{C}$  on

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 + a_4 + 2(a_3 + a_5) & a_1 + a_3 & a_1 + a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 + a_3 & a_1 + a_2 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 + a_3 & a_1 & a_1 + a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_2 + a_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(a_2 + a_5) \end{pmatrix}, \quad (63)$$

jossa jännitys ja venymäkomponenttien järjestys on kuten kaavoissa (15). Materiaalivakioiden  $a_i$  ratkaisu on taas helpointa aloittaa isotropiatason leikkaustermistä

$$\tau_{23} = G_T \gamma_{23} \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2G_T. \quad (64)$$

Tarkastellaan seuraavaksi leikkausta tasossa, joka sisältää pitkittäissuunnan, eli esimerkiksi taso  $x_1, x_2$  tai  $x_1, x_3$ :

$$\tau_{12} = G_L \gamma_{12}, \quad \tau_{31} = G_L \gamma_{31} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}(a_2 + a_5) = G_L, \quad (65)$$

täten

$$G_T + \frac{1}{2}a_5 = G_L \quad \Rightarrow \quad a_5 = 2(G_L - G_T). \quad (66)$$

Isotropiatasossa pätevät yhteydet

$$a_1 = \lambda_T = \frac{G_T(E_T - 2G_T)}{3G_T - E_T} = \frac{\nu_T E_T}{(1 + \nu_T)(1 - 2\nu_T)}, \quad G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)}. \quad (67)$$

Jännitys  $x_1$ -akselin suunnassa aiheuttaa venymätilan  $\varepsilon_{22} = -\nu_L \varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33} = -\nu_L \varepsilon_{11}$ , joten

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E_L \varepsilon_{11} = (a_1 + a_2 + a_4 + 2(a_3 + a_5))\varepsilon_{11} + (a_1 + a_3)\varepsilon_{22} + (a_1 + a_3)\varepsilon_{33} \\ &= (a_1 + a_2 + a_4 + 2(a_3 + a_5))\varepsilon_{11} - 2\nu_L(a_1 + a_3)\varepsilon_{11} \\ &= [(1 - 2\nu_L)\lambda_T + 2G_T + 2(1 - \nu_L)a_3 + a_4 + 4(G_L - G_T)]\varepsilon_{11}, \end{aligned} \quad (68)$$

josta seuraa

$$E_L = 2(1 - \nu_L)a_3 + a_4 + (1 - 2\nu_L)\lambda_T + 4G_L - 2G_T. \quad (69)$$

Ehdot  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$  johtavat samaan yhtälöön, joka on

$$\sigma_{22} = (\lambda_T + a_3)\varepsilon_{11} + (\lambda_T + 2G_T)\varepsilon_{22} + \lambda_T \varepsilon_{33} = [\lambda_T + a_3 - 2\nu_L(\lambda_T + G_T)]\varepsilon_{11} = 0, \quad (70)$$

josta saadaan  $a_3$  ratkaistua

$$a_3 = 2\nu_L(\lambda_T + G_T) - \lambda_T = (2\nu_L - 1)\lambda_T + 2\nu_L G_T. \quad (71)$$

Viimeiseksi saadaan vakiolle  $a_4$  arvo

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= E_L + 2G_T - 4G_L + (2\nu_L - 1)\lambda_T - 2(1 - \nu_L)[(2\nu_L - 1)\lambda_T + 2\nu_L G_T] \\ &= E_L - 4G_L + G_T + (1 - 2\nu_L)^2(G_T + \lambda_T). \end{aligned} \quad (72)$$

Poikittaisisotrooppisen lineaarisesti kimmoisan aineen jäykkyysmatriisi erikoistapauksessa, jossa pitkittäissuunta on  $x_1$ -akselin suuntainen, on muotoa

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} E_L + 4\nu_L^2(\lambda_T + G_T) & 2\nu_L(\lambda_T + G_T) & 2\nu_L(\lambda_T + G_T) & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu_L(\lambda_T + G_T) & \lambda_T + 2G_T & \lambda_T & 0 & 0 & 0 \\ 2\nu_L(\lambda_T + G_T) & \lambda_T & \lambda_T + 2G_T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_L \end{pmatrix}, \quad (73)$$

jossa

$$\lambda_T = \frac{\nu_T E_T}{(1 + \nu_T)(1 - 2\nu_T)}, \quad G_T = \frac{E_T}{2(1 + \nu_T)}. \quad (74)$$

Kuten joustumuotoisessa esityksessäkin, kertoimet (64)-(72) redusoidut isotrooppisen aineen tapauksessa tuttuihin Lamén vakioiden arvoihin  $a_1 = \lambda = \nu E / [(1 + \nu)(1 - 2\nu)]$ ,  $a_2 = 2\mu = 2G$ , ja  $a_3 = a_4 = a_5 = 0$ .

## Materiaalin jäykkyystensori

Lineaarinen yhtälö (61) voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (75)$$

jossa jäykkyystensori  $C_{ijkl}$  on

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= a_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} a_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + a_3 (\delta_{ij} M_{kl} + M_{ij} \delta_{kl}) + \\ &\quad + a_4 M_{ij} M_{lk} + a_5 (\delta_{ik} M_{lj} + M_{ik} \delta_{lj}). \end{aligned} \quad (76)$$

Vastaavanlainen muoto voidaan johtaa myös joustotensorille  $D_{ijkl}$ .

## Yhteenveto

Tässä artikkelissa johdettiin invarianttiteorian avulla lineaarisesti kimmoisan poikittaisisotrooppisen aineen joustomuotoinen ja jäykkyyssuotoinen konstitutiivinen yhtälö yleisessä koordinaatistosta riippumattomassa muodossa, yhtälöt (14) ja (61). Yhtälöissä tarvittavat viisi toisistaan riippumatonta materiaalivakiota johdettiin fysikaalisesti mielekkäiden suureiden, kahden kimmokertoimen  $E_L, E_T$ , kahden Poissonin vakion  $\nu_L, \nu_T$  ja yhden leikkauskertoimen  $G_L$  avulla. Joustomuotoinen konstitutiivinen yhtälö on

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (b_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + b_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M})) \mathbf{I} + b_2 \boldsymbol{\sigma} + (b_3 \operatorname{tr} \boldsymbol{\sigma} + b_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M})) \mathbf{M} + b_5 (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}), \quad (14)$$

jossa materiaalivakiot  $b_1, \dots, b_5$  ovat

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{\nu_T}{E_T}, & b_2 &= \frac{1 + \nu_T}{E_T}, & b_3 &= \frac{\nu_T}{E_T} - \frac{\nu_L}{E_L}, \\ b_4 &= \frac{1 + 2\nu_L}{E_L} + \frac{1}{E_T} - \frac{1}{G_L}, & b_5 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{G_L} - \frac{1}{G_T} \right). \end{aligned}$$

Vastaavasti jäykkyyssuotoinen konstitutiivinen yhtälö on

$$\boldsymbol{\sigma} = (a_1 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + a_3 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})) \mathbf{I} + a_2 \boldsymbol{\varepsilon} + (a_3 \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} + a_4 \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M})) \mathbf{M} + a_5 (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{M} + \mathbf{M} \boldsymbol{\varepsilon}), \quad (61)$$

jossa materiaalivakiot  $a_1, \dots, a_5$  ovat

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda_T = \frac{\nu_T E_T}{(1 + \nu_T)(1 - 2\nu_T)} = \frac{G_T(E_T - 2G_T)}{3G_T - E_T}, \\ a_2 &= \frac{E_T}{1 + \nu_T} = 2G_T, \\ a_3 &= (2\nu_L - 1)\lambda_T + 2\nu_L G_T, \\ a_4 &= E_L - 4G_L + G_T + (1 - 2\nu_L)^2(G_T + \lambda_T), \\ a_5 &= 2(G_L - G_T). \end{aligned}$$

## Viitteet

- [1] S.M. Arnold and S. Kruch. Differential continuum damage mechanics models for creep and fatigue of unidirectional metal matrix composites. Technical Report 105213, NASA Technical Memorandum 105213, November 1991.
- [2] J.P. Boehler, editor. *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*. Number 292 in International Centre for Mechanical Sciences, Courses and Lectures, Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics. Springer-Verlag, 1987.
- [3] A. Cazzani and M. Rovati. Extrema of Young's modulus for cubic and transversely isotropic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 40(7):1713–1744, 2003. ISSN 0020-7683. doi:[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00668-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00668-6).
- [4] P. Chadwick, M. Vianello, and S.C. Cowin. A new proof that the number of linear elastic symmetries is eight. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 49(11):2471–2492, 2001. doi:[https://doi.org/10.1016/S0022-5096\(01\)00064-3](https://doi.org/10.1016/S0022-5096(01)00064-3). The Jean-Paul Boehler Memorial Volume.
- [5] S.C. Cowin. *Continuum Mechanics of Anisotropic Materials*. Springer, 2013.

- [6] S. Forte and M. Vianello. Symmetry classes for elasticity tensors. *Journal of Elasticity*, 43(2):81–108, 1996. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00042505>.
- [7] S. Holopainen, R. Kouhia, and T. Saksala. Continuum approach for modeling transversely isotropic high-cycle fatigue. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 60:183–195, 2016. doi:<https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2016.06.007>.
- [8] M. Itskov. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers. With Applications to Continuum Mechanics*. Springer, 4th edition, 2015.
- [9] M. Itskov and N. Aksel. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function. *International Journal of Solids and Structures*, 41(14):3833–3848, 2004. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.027>.
- [10] K. Kolari. Damage mechanics model for brittle failure of transversely isotropic solids - finite element implementation. Technical Report 628, VTT Publications, Espoo, 2007. URL <http://urn.fi/urn:nbn:fi:tkk-008061>.
- [11] R. Kouhia. Introduction to materials modelling. Lecture notes, 2022. URL <https://webpages.tuni.fi/rakmek/personnel/kouhia/teach/>.
- [12] I-Shih Liu. On representations of anisotropic invariants. *International Journal of Engineering Science*, 20(10):1099–1109, 1982. doi:[https://doi.org/10.1016/0020-7225\(82\)90092-1](https://doi.org/10.1016/0020-7225(82)90092-1).
- [13] I-Shih Liu. *Continuum Mechanics*. Springer, 2002.
- [14] N.S. Ottosen and M. Ristinmaa. *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier, 2005.
- [15] J. Schröder and P. Neff. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International Journal of Solids and Structures*, 40(2):401–445, 2003. doi:[https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(02\)00458-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00458-4).
- [16] G.F. Smith, M.M. Smith, and R.S. Rivlin. Integrity bases for a symmetric tensor and a vector – The crystal classes. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 12:93–133, 1963. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00281221>.
- [17] A.J.M. Spencer. Theory of invariants. In C. Eringen, editor, *Continuum Physics*, volume 1 – Mathematics. Academic Press, 1971. Part III.
- [18] A.J.M. Spencer and R.S. Rivlin. Isotropic integrity bases for vectors and second-order tensors. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 9:45–63, 1962. doi:<https://doi.org/10.1007/BF00253332>.
- [19] J.M. Zhang. On anisotropic invariants of vectors and second order tensors. *Archives of Mechanics*, 43(2-3):215–238, 1991.

Kari Kolari  
 VTT Technical Research Centre of Finland  
 PL 1000, 02044 VTT Espoo  
[kari.kolari@vtt.fi](mailto:kari.kolari@vtt.fi)

Reijo Kouhia  
 Rakennustekniikka, Tampereen yliopisto  
 PL 600, 33014 Tampereen yliopisto (Hervannan kampus)  
[reijo.kouhia@tuni.fi](mailto:reijo.kouhia@tuni.fi)